MATEMATICAS SUPERIORES

YA. S. BUGROV

Matemáticas superiores

Ecuaciones diferenciales
Integrales múltiples
Series
Funciones de variable compleja

Я. С. БУГРОВ, С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
КРАТКИЕ ИНТЕГРАЛЫ
РЯДЫ
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Ya. S. Bugrov
S. M. Nikolski

Matemáticas superiores

Ecuaciones diferenciales
Integrales múltiples
Series
Funciones de variable compleja

Editorial Mir Moscú

Versión española por
el ingeniero A.I. Samojválov

Primera edición 1981
Primera reimpresión 1988

На испанском языке

Impreso en la URSS

ISBN 5-03-000878-0

©Издательство "Наука", 1981
© traducción al español, editorial Mir, 1988

Indice

Prefacio 9

Capítulo 1. Ecuaciones diferenciales ordinarias . . . 10

§ 1.1. Problema que conduce a una ecuación diferencial 10
§ 1.2. Conceptos generales 10
§ 1.3. Ecuaciones diferenciales elementales de primer orden 21
§ 1.4. Teorema de existencia de la solución de una ecuación diferencial de primer orden 31
§ 1.5. Espacio métrico 34
§ 1.6. Demostración del teorema de existencia de la solución de una ecuación diferencial de primer orden 40
§ 1.7. Método de Euler de resolución aproximada de la ecuación diferencial de primer orden 43
§ 1.8. Ecuaciones no resueltas con respecto a la derivada 45
§ 1.9. Soluciones singulares 48
§ 1.10. Envolvente de una familia de curvas 49
§ 1.11. Ecuación diferencial de segundo orden 51
§ 1.12. Sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden 53
§ 1.13. Ecuación diferencial de n-ésimo orden 56
§ 1.14. Reducción del orden de una ecuación diferencial 59
§ 1.15. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior 63
§ 1.16. Ecuaciones homogéneas lineales de n-ésimo orden con coeficientes constantes 70
§ 1.17. Método de variación de las constantes 75
§ 1.18. Solución particular de una ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes . . . 77
§ 1.19. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Espacio de fases 84
§ 1.20. Sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales 87
§ 1.21. Solución general de un sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes 92
§ 1.22. Reducción de un sistema de ecuaciones a una sola ecuación 99

§ 1.23. Sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes 102
§ 1.24. Integración de ecuaciones diferenciales mediante series de potencias 106
§ 1.25. Elementos de la teoría de la estabilidad 110
§ 1.26. Clasificación de los puntos de reposo 117

Capítulo 2. Integrales múltiples 127

§ 2.1. Introducción 127
§ 2.2 Algunas nociones de la teoría de la medida de Jordan 133
§ 2.3. Propiedades de las integrales múltiples. Teoremas de existencia 139
§ 2.4. Integral como función del parámetro. Reducción de una integral múltiple a las reiteradas 143
§ 2.5. Demostración de la existencia de la integral de una función continua 153
§ 2.6. Cambio de variables. Caso elemental 155
§ 2.7. Cambio de variables. Caso general 156
§ 2.8. Sistema polar de coordenadas en el plano . . . 160
§ 2.9. Sistema polar de coordenadas en el espacio . . . 162
§ 2.10. Coordenadas cilíndricas 165
§ 2.11. Area de una superficie 166
§ 2.12. Coordenadas del centro de masas 173
§ 2.13. Integrales impropias 177
§ 2.14. Integral impropia con particularidades a lo largo de la línea 182
§ 2.15. Integral impropia dependiente de un parámetro 183

Capítulo 3. Análisis vectorial 192

§ 3.1. Curva orientada suave a trozos 192
§ 3.2. Integral curvilínea de primer género 194
§ 3.3. Integral del vector a lo largo de una curva . . . 196
§ 3.4. Campo de un potencial 201
§ 3.5. Ecuación diferencial en diferenciales totales 209
§ 3.6. Orientación de una región plana 212
§ 3.7. Fórmula de Green 213
§ 3.8. Integral sobre una superficie de primer género 218
§ 3.9. Orientación de una superficie 220
§ 3.10. Sistema de coordenadas y orientación de una superficie 223
§ 3.11. Integral sobre una región plana orientada . . . 227
§ 3.12. Flujo de un vector a través de una superficie orientada 230
§ 3.13. Divergencia. Teorema de Gauss—Ostrogradski . 234
§ 3.14. Campo solenoidal 241
§ 3.15. Fórmula de Stokes 243

Capítulo 4. Series de Fourier. Integral de Fourier . . . 248

§ 4.1. Series trigonométricas 248
§ 4.2. Convergencia de series trigonométricas 254
§ 4.3. Serie de Fourier 256
§ 4.4. Criterios de convergencia de las series de Fourier 259

§ 4.5. Propiedades ortogonales de las series trigonométricas 263
§ 4.6. Coeficientes de Fourier 265
§ 4.7. Estimación de los coeficientes de Fourier . . . 266
§ 4.8. Espacio de las funciones con el producto escalar 267
§ 4.9. Sistema ortogonal de funciones 270
§ 4.10. Completitud de funciones trigonométricas . . . 274
§ 4.11. Forma compleja de la serie de Fourier 278
§ 4.12. Concepto de integral de Fourier. Integral reiterada de Fourier 280
§ 4.13. Coseno y seno de transformaciones de Fourier 287
§ 4.14. Ejemplos 289
§ 4.15. Aproximación de una integral de Fourier . . . 292
§ 4.16. Suma de Fejér 293
§ 4.17. Completitud de los sistemas de funciones en C y L_2 299
§ 4.18. Nociones de la teoría de series múltiples de Fourier 301

Capítulo 5. Ecuaciones de la física matemática . . . 315

§ 5.1. Temperatura de un cuerpo 315
§ 5.2. Problema de Dirichlet 317
§ 5.3. Problema de Dirichlet para un círculo 318
§ 5.4. Problema de Dirichlet para un semipano . . . 420
§ 5.5. Ecuación de conducción del calor por una barra 322
§ 5.6. Conducción del calor para una barra infinita 327
§ 5.7. Vibraciones pequeñas de una cuerda 329
§ 5.8. Vibraciones de una cuerda infinita. Fórmula de d'Alembert 333
§ 5.9. Vibración de una membrana circular 335
§ 5.10. Problema general de Sturm—Liouville 340
§ 5.11. Integral de energía (de Dirichlet) 343
§ 5.12. Aplicación de las transformaciones de Fourier 348
§ 5.12.1. Ecuación de conducción del calor 349
§ 5.12.2. Ecuación de vibración de una cuerda infinita 352

Capítulo 6. Teoría de las funciones de una variable compleja 354

§ 6.1. Concepto de función de una variable compleja 354
§ 6.2. Derivada de la función de una variable compleja 357
§ 6.3. Condiciones d'Alembert—Euler (de Cauchy—Riemann) 364
§ 6.4. Funciones armónicas 367
§ 6.5. Función inversa 370
§ 6.6. Integración de funciones de una variable compleja 376
§ 6.7. Fórmula de Cauchy 382
§ 6.8. Integral del tipo de Cauchy 385
§ 6.9. Serie de potencias 386
§ 6.10. Serie de Laurent 389
§ 6.11. Clasificación de puntos singulares aislados. Residuos 395
§ 6.12. Clasificación de puntos singulares en el infinito 400
§ 6.13. Teorema de los residuos 403
§ 6.14. Cálculo de integrales con ayuda de los residuos 405
§ 6.15. Función lineal. Función lineal fraccional . . . 410

Capítulo 7. Cálculo operacional 417

§ 7.1. Transformada de Laplace 417
§ 7.2. Transformada de funciones elementales y propiedades de las transformadas 419
§ 7.3. Aplicación del cálculo operacional 432
Indice alfabético de materias 438

Prefacio

Este y otros dos nuestros libros editados en español bajo el título «Matemáticas superiores» abarcan todo el programa del curso respectivo que se da en los centros de enseñanza superior para especialidades de ingeniería, a excepción de la «Teoría de las probabilidades» y la mayor parte de los «Métodos numéricos».

En cada capítulo se exponen primero los conceptos fundamentales concernientes a las cuestiones de que se trata, mientras que las demostraciones formales de los teoremas se dan al final del capítulo o del párrafo. Semejante estructura permite limitarse, en caso de necesidad, a leer sólo los apartados iniciales de los capítulos o párrafos.

En los capítulos «Ecuaciones de la física matemática» y «Series de Fourier» para deducir algunas fórmulas hemos partido únicamente de las consideraciones físicas.

Notemos, además, que los capítulos 6 y 7 dedicados a la teoría de las funciones de una variable compleja y el cálculo operacional pueden leerse también antes del capítulo «Series e integrales de Fourier» que no exige ningunas nociones de la teoría mencionada, salvo conocimientos elementales de los números complejos. En particular, en este capítulo mostramos, cómo pueden hallarse integrales concretos de Fourier sin recurrir al cálculo operacional.

A nuestros lectores que deseen estudiar las matemáticas de un modo más completo les recomendamos los libros siguientes:

V. A. Ilyin, E. G. Poznyak «Fundamentals of Mathematical Analysis» en dos tomos, Editorial Mir, 1981;

L. D. Kudriávtsev «Análisis matemático», Editorial Mir, 1984;

S. M. Nikolsky «A Course of Mathematical Analysis» en dos tomos, Editorial Mir, 1982.

Los autores

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias

§ 1.1. Problema que conduce a una ecuación diferencial

Supongamos que un cuerpo, que tiene la temperatura θ_0 en el instante de tiempo $t = 0$, se halla colocado en un medio cuya temperatura es igual a a ($\theta_0 > a$). Se necesita encontrar la ley según la cual varía la temperatura del cuerpo en dependencia del tiempo. La temperatura buscada es una función del tiempo y vamos a designarla por $\theta(t)$.

De la física es noto que la velocidad de enfriamiento del cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio ambiente. Teniendo en cuenta que la función $\theta(t)$ es decreciente, en virtud de la interpretación mecánica de la derivada obtenemos

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - a], \tag{1}$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad.

La relación (1) es el modelo matemático del proceso físico dado. Se llama *ecuación diferencial*, porque, junto con la función desconocida $\theta(t)$, comprende también su derivada. La ecuación diferencial (1) puede describir asimismo otros procesos físicos. Por ejemplo, la desintegración radiactiva también se describe por la ecuación (1) para $a = 0$.

Es fácil adivinar la solución de la ecuación (1): $\theta(t) = Ce^{-kt} + a$, donde C es una constante arbitraria. El valor de esta constante puede hallarse de la condición de que $\theta(0) = \theta_0$. Entonces resulta que $\theta_0 = C + a$.

Ahora bien, la solución buscada tiene la forma

$$\theta(t) = (\theta_0 - a)\, e^{-kt} + a.$$

§ 1.2. Conceptos generales

Al estudiar los fenómenos físicos no se logra, con frecuencia, hallar directamente la ley que vincula las variables independientes y la función buscada, pero se puede establecer el nexo entre esta función y sus derivadas que se expresa por una *ecuación diferencial*.

Si la función buscada depende de una sola variable, la ecuación diferencial se denomina *ordinaria*. Una ecuación diferencial ordinaria arbitraria de orden n tiene la forma siguiente:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Aquí F es la función dada (conocida) de $n + 2$ variables que suele satisfacer las condiciones de continuidad y derivabilidad de las cuales ahora no vamos a hablar e $y = y(x)$, o sea la función de x, es la solución de la ecuación diferencial, es la función que se requiere hallar.

Se llama *solución de una ecuación diferencial* de orden n la función $y(x)$ que tiene en cierto intervalo (a, b) las derivadas $y'(x)$, $y''(x)$, . . ., $y^{(n)}(x)$ hasta el orden n, inclusivamente, y satisface esta ecuación. Esto quiere decir que se cumple la identidad respecto a x:

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b).$$

En términos generales, a cada solución le corresponde su propio intervalo. Desde luego, si la función $y(x)$, dada en el intervalo (a, b), es la solución de la ecuación diferencial (1), esta función examinada en un intervalo (c, d) que pertenezca a (a, b) es asimismo la solución de la ecuación (1).

En los próximos párrafos examinaremos las ecuaciones diferenciales definidas por las funciones reales F y buscaremos sus soluciones reales $y(x)$. Omitiremos el término «real» como algo que se entiende por sí mismo. Más adelante, cuando estudiemos las ecuaciones diferenciales lineales, necesitaremos también sus soluciones complejas. Sin embargo, de esto se tratará posteriormente.

Así, pues, vamos a llamar a las soluciones reales $y(x)$, $x \in (a, b)$ de una ecuación diferencial ordinaria simplemente *soluciones* de esta ecuación.

La solución de una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden es, como se ve de su definición, la función $y(x)$. Esta función es continua en cierto intervalo (a, b) junto con sus derivadas hasta el orden $n - 1$ inclusivamente y tiene, además, en (a, b) la derivada $y^{(n)}(x)$ de orden n. Vamos a suponer que esta última derivada es asimismo continua en (a, b) sin mencionar esto cada vez especialmente.

Llamaremos *curva integral* de una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden al gráfico de esta ecuación (véase a continuación la observación del § 1.3).

Además, nos permitiremos denominar curva integral a la solución de una ecuación diferencial y solución a la curva integral.

Puesto que este capítulo está dedicado sólo a ecuaciones diferenciales ordinarias, no surgirá ninguna confusión si suprimimos alguna que otra vez la palabra «ordinaria».

Las ecuaciones

$$y''' + 2y' + y = \operatorname{sen} x, \quad (y'')^2 + 1 = 0,$$
$$y'' + (y')^2 = 0, \qquad y' + ky = \cos x$$

pueden servir de ejemplo de las ecuaciones diferenciales ordinarias. La primera de ellas es de tercer orden, la segunda y la tercera, de segundo orden y la cuarta, de primer orden.

A propósito, notemos que directamente se ve que la segunda ecuación carece por completo de soluciones reales.

Existe el término: *integrar una ecuación diferencial*. Esto quiere decir que es necesario hallar unas u otras soluciones de la ecuación diferencial dada. La obtención de la solución de una ecuación diferencial está siempre ligada a la necesidad de *integrar* las funciones que forman parte de esta ecuación.

Vamos a comenzar por el estudio de la ecuación diferencial de primer orden

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

Por regla general, supondremos que la función $F(x, y, z)$ se da sobre cierta región del espacio tridimensional Ω y es continua sobre Ω junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial z}$. En particular, Ω puede ser todo el espacio tridimensional de los puntos (x, y, z).

Recordemos que llamamos *solución* o *solución particular* de la ecuación diferencial (2) a toda función real continuamente derivable $y = y(x)$, dada en cierto intervalo (a, b), que satisface esta ecuación:

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b), \quad (x, y(x), y'(x)) \in \Omega.$$

Con ello cada solución tiene, por lo general, un intervalo donde ella se da.

Dos ecuaciones algebraicas

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

se llaman equivalentes sobre la región Ω de los puntos (x, y, z) si del hecho de que el punto $(x, y, z) \in \Omega$ satisface una de estas ecuaciones se deduce que ella satisface también la otra.

Respectivamente, dos ecuaciones diferenciales

$$F_1(x, y, y') = 0, \quad F_2(x, y, y') = 0$$

se dicen *equivalentes* sobre la región Ω si son equivalentes sobre Ω las ecuaciones algebraicas (3).

Ahora bien, en este caso la solución $y(x)$, $x \in (a, b)$, $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$, de una de las ecuaciones diferenciales es automáticamente la solución de la otra.

Además, las ecuaciones diferenciales equivalentes sobre la región Ω se consideran como una misma ecuación.

Al transformar una ecuación diferencial es necesario mirar que la nueva ecuación diferencial, obtenida después de la transformación, sea equivalente (¡sobre la región Ω!) a la anterior. O bien, en todo

caso, hay que ver cuáles de las soluciones pueden desaparecer o surgir después de la transformación.

Señalemos un problema, llamado *problema de Cauchy* [1]) para una ecuación diferencial de primer orden. Se enuncia así: es necesario hallar la solución $y = y(x)$ de la ecuación diferencial dada que satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0,$$

donde (x_0, y_0) es el punto dado del plano (x, y).

Desde luego, en cada caso dado el problema de Cauchy puede tener una solución o no tenerla.

Si el problema de Cauchy tiene una solución, es importante revelar si es ésta única o no. Ya ahora notemos un hecho importante que será demostrado en el § 1.6: para una ecuación diferencial de primer orden, en la forma resuelta respecto a y',

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad ((x, y) \in G)$$

el problema de Cauchy tiene una solución y además única para todo punto (x_0, y_0) de la región G del plano (x, y) si la función $f(x, y)$, dada sobre esta región, es continua junto con su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Naturalmente, la unicidad de la solución del problema de Cauchy conviene entenderla en el sentido de que si $y(x)$ e $y_1(x)$ son sus soluciones que satisfacen la misma condición inicial ($y(x_0) = y_1(x_0) = y_0$) y se dan, respectivamente, en los intervalos (a, b) y (c, d), entonces $y(x) = y_1(x)$ en la intersección de estos intervalos.

EJEMPLO 1. La ecuación diferencial elemental de primer orden tiene la forma

$$y' = f(x) \quad (a < x < b), \tag{4}$$

donde $f(x)$ es la función continua en cierto intervalo (a, b).

De la teoría de la integral indefinida se deduce que toda solución de esta ecuación diferencial puede ser escrita del modo siguiente:

$$y = \int f(x)\, dx + C,$$

donde en el segundo miembro como el primer sumando está la integral indefinida de $f(x)$, o sea, cierta función primitiva de $f(x)$ en (a, b):

$$\psi(x) = \int f(x)\, dx$$

y como segundo sumando, la constante arbitraria C $(-\infty < C < \infty)$.

[1]) A. L. Cauchy (1789—1857), célebre matemático francés.

De suerte, toda solución de la ecuación diferencial (4) está definida por la igualdad

$$y = \psi(x) + C \quad (a < x < b), \tag{5}$$

donde $\psi(x)$ es cierta primitiva de $f(x)$ en (a, b) y C es la constante arbitraria, o sea, el parámetro de la familia de soluciones.

A cada valor del parámetro C le corresponde cierta solución (particular) de la ecuación diferencial (4) y con ello toda solución de esta ecuación puede ser obtenida como solución particular de la familia (5) para el valor respectivo de C.

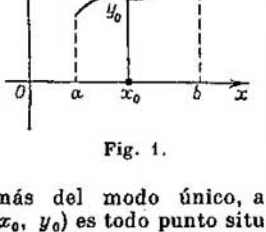

Fig. 1.

Si derivamos la igualdad (5) respecto a x, obtendremos la ecuación diferencial inicial (4). Merced a esta propiedad la igualdad (5) que contiene la constante arbitraria C se llama integral general de la ecuación diferencial (4).

El problema de Cauchy para la ecuación diferencial (4) se resuelve, y además del modo único, a la condición inicial $y(x_0) = y_0$, donde (x_0, y_0) es todo punto situado en la franja $\{a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ del plano (x, y). Para resolverlo sustituimos el punto (x_0, y_0) en la integral general (5) y hallamos la constante C:

$$y_0 = \psi(x_0) + C, \quad C = y_0 - \psi(x_0).$$

De aquí obtenemos

$$y - y_0 = \psi(x) - \psi(x_0).$$

Esta es precisamente la solución (curva integral) de nuestra ecuación diferencial (4), solución que pasa por el punto (x_0, y_0) (fig. 1).

EJEMPLO 2. Examinemos la ecuación diferencial

$$y' = ky \quad (-\infty < x, \ y < \infty), \tag{6}$$

donde k es la constante dada.

Es fácil comprobar que la función

$$y = Ce^{kx} = C \exp(kx) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{7}$$

para todo valor del parámetro C es la solución de la ecuación diferencial (6). Ahora no vamos a explicar cómo se puede llegar lógicamente a esta familia de soluciones dependiente de la constante arbitraria C (véase a continuación el § 1.3).

Derivemos la igualdad (7) respecto a x:

$$y' = Ck \exp(kx) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{8}$$

Ahora excluyamos el parámetro C de ambas igualdades (7) y (8), o sea, hallemos C de una de ellas y sustituyámosla en la otra. Volvemos a obtener, evidentemente, la ecuación diferencial inicial (6).

En virtud de esta propiedad la igualdad (7) se llama integral general de la ecuación diferencial (6).

Vamos a definir la integral general de una ecuación diferencial de primer orden.

Supongamos que se da la ecuación diferencial de primer orden

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

donde la función $F(x, y, z)$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial z}$ son continuas sobre la región Ω de los puntos (x, y, z) del espacio tridimensional.

Se denomina *integral general de la ecuación diferencial* (2) la igualdad

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{9}$$

donde la función $\Phi(x, y, z)$ es continuamente derivable sobre cierta región de los puntos (x, y, z) y posee la propiedad siguiente: si se deriva la igualdad (9) respecto a x, suponiendo formalmente que $y = y(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0, \tag{10}$$

y se excluye C de las ecuaciones (9) y (10), obtendremos una ecuación diferencial equivalente a la ecuación (2).

La ecuación (2) se llama, además, ecuación diferencial de una familia de funciones (9) dependientes del parámetro C.

EJEMPLO 3. Examinemos la familia de funciones

$$y = (x - C)^3 \quad (-\infty < x < \infty) \tag{11}$$

dependientes del parámetro arbitrario C.

Derivemos la ecuación (11) respecto a x:

$$y' = 3(x - C)^2 \quad (-\infty < x < \infty) \tag{12}$$

y elevemos al cubo la igualdad obtenida:

$$(y')^3 = 27(x - C)^6. \tag{13}$$

Es fácil ver que hemos obtenido una ecuación diferencial equivalente a la ecuación (12). Pero entonces de (11) y (13) se deduce la ecuación diferencial

$$y'^3 - 27y^2 = 0. \tag{14}$$

Es fácil comprobar que toda función (11) satisface esta ecuación. Además, este hecho ya se deduce de lo que la ecuación diferencial (14)

es el resultado de exclusión del parámetro C en las igualdades (11) y (13).

Hemos demostrado que la igualdad (11) que contiene el parámetro arbitrario C es la integral general de la ecuación diferencial (14).

A continuación estudiaremos algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden e indicaremos los métodos de su resolución que conducen a las familias de soluciones dependientes de un solo parámetro C. Por lo común estas familias serán precisamente las integrales generales de las ecuaciones diferenciales respectivas.

Surge la pregunta: ¿contiene o no la integral general de la ecuación diferencial dada de primer orden todas las soluciones de esta ecuación para todos valores del parámetro C? Hablando en general, esto no es así. Sin embargo, esto tiene lugar a ciencia cierta si la integral general de una ecuación diferencial de primer orden puede escribirse en la forma resuelta respecto a C

$$\Psi(x, y) = C \tag{15}$$

y en este caso el primer miembro de la ecuación (15) es una función *derivable continuamente*. Es totalmente justo el teorema siguiente.

TEOREMA 1. *Supongamos que se da la ecuación diferencial*

$$F(x, y, y') = 0, \quad (x, y, y') \in \Omega, \tag{2'}$$

donde la función $F(x, y, z)$ *junto con sus derivadas parciales* $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ *es continua sobre la región* Ω *del espacio* (x, y, z) *y supongamos que la igualdad* (15) *es su integral general, donde* $\Psi(x, y)$ *es una función continuamente derivable sobre cierta región del plano* (x, y).

Entonces, si

$$y = y(x), \quad (x, y(x), y'(x)) \in \Omega,$$

es la solución de la ecuación (15), *solución continuamente derivable en un intervalo* (a, b) *para cierto valor de* C, *entonces ella es, por obligación, la solución de la ecuación diferencial* (2') *y, al contrario, toda solución de la ecuación diferencial* (2') *satisface la ecuación* (15) *en el intervalo donde está dada para cierta constante* C.

DEMOSTRACION. Supongamos que $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ es la solución continuamente derivable de la ecuación (15) para una constante C_0:

$$\Psi(x, y(x)) = C_0, \quad x \in (a, b).$$

Derivemos esta identidad respecto a x:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x) = 0, \quad x \in (a, b). \tag{16}$$

Esto muestra que la función $y(x)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y)\, y' = 0 \tag{17}$$

y, por consiguiente, también la solución de la ecuación diferencial (2') que es equivalente sobre la región Ω a la ecuación (17) (según la definición de la integral general).

Al contrario, supongamos que $y(x)$, $a < x < b$, es la solución de la ecuación diferencial (2') y, por consiguiente, también la solución de la ecuación (17), o sea, supongamos que se cumple la identidad (16) la cual se puede escribir así:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x, y(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b).$$

Integrándola entre los límites x_0 y x, donde x_0, $x \in (a, b)$, obtenemos

$$0 \equiv \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx}\Psi(x, y(x))\, dx = \Psi(x, y(x)) - \Psi(x_0, y(x_0)) =$$

$$= \Psi(x, y(x)) - C_0 \quad (C_0 = \Psi(x_0, y(x_0))),$$

o sea, la función $y(x)$ satisface en el intervalo (a, b) la ecuación $\Psi(x, y) = C_0$.

Observación para el ejemplo 2. La integral general de la ecuación diferencial

$$y' = ky \quad (-\infty < y < \infty) \tag{6'}$$

en la forma resuelta respecto a C (véase (7)) tiene el aspecto

$$ye^{-kx} = C \quad (-\infty < x, y < \infty). \tag{18}$$

Como el primer miembro de esta ecuación tiene las derivadas parciales continuas sobre todo el plano (x, y), entonces, sobre la base del teorema 1, la integral general (18) contiene para diversas constantes C todas las soluciones de la ecuación diferencial (6').

Para resolver el problema de Cauchy en cuanto a la ecuación diferencial (6') cuando la condición inicial $y(x_0) = y_0$, sustituimos (x_0, y_0) en (18) y hallamos $C = C_0$:

$$y_0 e^{-kx} = C_0.$$

La solución del problema de Cauchy tiene la forma

$$ye^{-kx} = y_0 e^{-kx_0}$$

o bien

$$y = y_0 e^{k(x-x_0)} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Observación para el ejemplo 3. En este ejemplo la ecuación diferencial puede escribirse en la forma

$$F(x, y, y') = 0, \tag{19}$$

donde la función

$$F(x, y, y') = y'^3 - 27y^2$$

es continuamente derivable en todo el espacio (x, y, z) el cual vamos a designar por Ω.

Ya sabemos que la integral general de esta ecuación tiene la forma

$$y = (x - C)^3 \quad (-\infty < x < \infty). \tag{11}$$

Si la ecuación (11) se resuelve respecto a C, obtenemos

$$\Psi(x, y) = C, \quad \Psi(x, y) = x - y^{1/3}. \tag{11'}$$

La derivada parcial de la función Ψ respecto a y no existe sobre el eje $y = 0$, por eso la condición del teorema 1 no se cumple. Sin

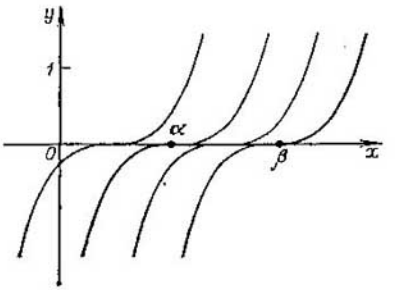

Fig. 2.

embargo, en este caso no se puede garantizar que toda solución de la ecuación diferencial (19) forme parte de su integral general para cierta C.

La fig. 2 muestra una familia de parábolas cúbicas (11) para diferentes valores de C. Cada una de estas parábolas es la curva integral de la ecuación diferencial (19). No obstante, existen, además, otras curvas integrales, por ejemplo, la curva representada en la fig. 2 con línea gruesa:

$$y(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^3, & x \leqslant \alpha, \\ 0, & \alpha < x < \beta, \\ (x-\beta)^3 & \beta \leqslant x. \end{cases}$$

Así pues, la ecuación diferencial (19) tiene la integral general (11) definida sobre todo el plano (x, y), pero esta integral no contiene todas las soluciones de esta ecuación para diversos valores de C. Hay un conjunto infinito de soluciones correspondientes a los pares de números (α, β), donde $\alpha < \beta$, que no se obtienen de la familia (11) para cierto valor de C.

Sin embargo, si la ecuación diferencial (19) se examina para los valores positivos de y $(y > 0)$, o sea, se supone que la función $F(x, y, z)$ se da en el semiespacio $y > 0$ que designemos por Ω_+, entonces la integral general

$$\Psi(x, y) = x - y^{1/3} = C,$$
$$-\infty < C < \infty, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

se define por la función $\Psi(x, y)$ que es continuamente derivable en el semiespacio Ω_+. Por eso en el caso dado es aplicable el teorema 1

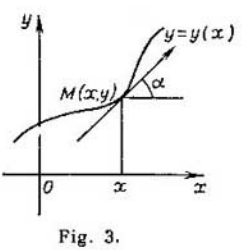

Fig. 3.

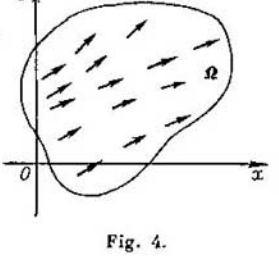

Fig. 4.

y la integral general contiene, para diferentes C, todas las soluciones de la ecuación diferencial que pertenecen al semiplano superior

$$\{-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty\}.$$

Semejante fenómeno tiene lugar asimismo para la región Ω_- de los puntos (x, y, z), donde $y < 0$.

Señalemos que la ecuación diferencial en la forma resuelta respecto a la derivada

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{20}$$

establece una ligazón evidente entre las coordenadas del punto $M = (x, y)$ y la pendiente de la tangente $\frac{\partial y}{\partial x}$ a la curva integral en este punto (fig. 3):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Si la función $f(x, y)$ está definida sobre cierta región Ω del plano, a cada punto $M \in \Omega$ le corresponde cierta dirección cuya pendiente es igual a $f(x, y)$. Indicando esta dirección por el vector unitario que pasa por el punto M, obtenemos sobre la región Ω el *campo de direcciones* (fig. 4).

Las curvas integrales de la ecuación (20) son las curvas para las cuales las direcciones mencionadas son las direcciones de las tangentes. Resolver una ecuación diferencial significa hallar tales curvas que las direcciones de las tangentes a ellas en cada punto coincidan con la dirección del campo. Naturalmente, en el caso dado las curvas integrales pertenecen a la región Ω.

EJEMPLO 4. $y' = y/x$.

El segundo miembro de esta ecuación está definido sobre el conjunto Ω de todos los puntos del plano (x, y), a excepción de los puntos del eje y. Si los puntos $M = (x, y) \in \Omega$ están sobre la recta $y = kx$, entonces para ellos

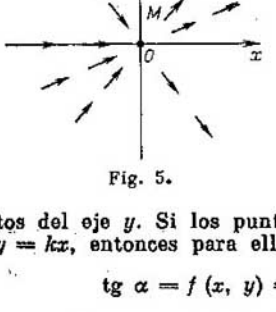

Fig. 5.

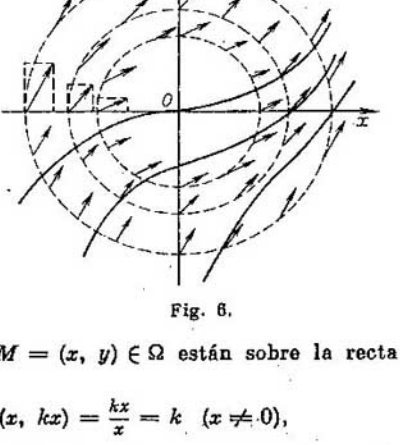

Fig. 6.

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y) = f(x, kx) = \frac{kx}{x} = k \quad (x \neq 0),$$

o sea, el campo de direcciones tiene la forma representada en la fig. 5.

En este caso la dirección de la recta $y = kx$ coincide con la dirección del campo en cada punto de esta curva y, por consiguiente, los rayos sin el punto (0, 0), que no son paralelos al eje y y parten del punto nulo, son las curvas integrales.

Para construir el campo de direcciones es cómodo examinar los lugares geométricos de los puntos en los cuales las tangentes a las

curvas integrales conservan una dirección constante. Tales lugares geométricos de los puntos se llaman *isoclinas*.

EJEMPLO 5. $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\sqrt{x^2 + y^2} = k$ es la ecuación de la isoclina correspondiente a determinado valor de k ($y' = k$), o sea, una circunferencia de radio k (fig. 6).

Conociendo las isoclinas de una ecuación diferencial, es fácil dibujar un esbozo de las curvas integrales.

§ 1.3. Ecuaciones diferenciales elementales de primer orden

Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ unas funciones continuas sobre cierta región Ω del plano (x, y).

La expresión

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \quad ((x, y) \in \Omega) \tag{1}$$

se llama *ecuación diferencial de primer orden*.

En realidad la expresión (1) reúne dos ecuaciones diferenciales de primer orden: respecto a la función $y(x)$ y respecto a la función $x(y)$.

En el primer caso por solución de la ecuación (1) se entiende la función $y = y(x)$ que está definida en cierto intervalo (a, b) (dependiente de ella), tiene la derivada continua y satisface la ecuación (1):

$$M(x, y(x))\,dx + N(x, y(x))\,y'(x)\,dx = 0$$
$$(x \in (x, b), \quad (x, y(x)) \in \Omega).$$

Puesto que la diferencial dx de la variable independiente x no es igual a cero, en esta ecuación se puede simplificar por dx y obtener un valor de $y(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial de primer orden escrita en su forma habitual:

$$M(x, y) + N(x, y)\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad ((x, y) \in \Omega). \tag{2}$$

En lo que se refiere a las soluciones que tienen la forma $y = y(x)$ las ecuaciones diferenciales (1) y (2) son equivalentes.

Razonando análogamente, obtenemos que en cuanto a las soluciones que tienen la forma $x = x(y)$ la ecuación diferencial (1) es equivalente a la siguiente:

$$M(x, y)\,\frac{dx}{dy} + N(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \Omega). \tag{3}$$

Vamos a estudiar más detalladamente la ecuación diferencial (2) (respecto a y).

Supongamos que la función $N(x, y)$ es distinta de cero por doquier sobre Ω ($N(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$). Entonces ella, en virtud de su continuidad sobre el conjunto conexo Ω, es positiva por doquier sobre Ω o bien negativa por doquier sobre Ω. En este caso la ecuación (2) puede escribirse en la forma resuelta respecto a $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2'}$$

o sea, las ecuaciones (2) y (2') son equivalentes sobre Ω. Sin embargo, si la función $N(x, y)$ es igual a cero en ciertos puntos de Ω, entonces las ecuaciones (2) y (2') no serán equivalentes más que en una parte ω de la región Ω, allí donde la función $N(x, y)$ se distingue de cero.

Supongamos que en el punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ la función N se anula ($N(x_0, y_0) = 0$). Si en este caso $M(x_0, y_0) \neq 0$, entonces, evidentemente, la ecuación (2) no tiene una solución que pase por este punto, ya que el segundo sumando del primer miembro de la ecuación (2) para $x = x_0$ e $y = y_0$ es igual a cero, mientras que el primer sumando, según la condición, no lo es.

Sin embargo, si a la vez con la igualdad $N(x_0, y_0) = 0$ se cumple también la igualdad $M(x_0, y_0) = 0$, entonces por el punto (x_0, y_0) puede pasar la solución: una sola o varias o bien incluso un número infinito de soluciones. A continuación veremos esto de los ejemplos.

Una observación semejante se puede hacer también respecto a la ecuación diferencial (3). En estos razonamientos sólo es necesario cambiar de lugar x e y, así como M y N.

Examinemos además el caso cuando ambas funciones M y N se distinguen de cero por doquier sobre Ω. En este caso el segundo miembro de la ecuación (2') es también distinto de cero por doquier sobre Ω y tiene un mismo signo. Pero entonces la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial (2') tiene la derivada $y'(x)$ del mismo signo. Esto muestra que la solución $y = y(x)$ es estrictamente monótona en el intervalo (a, b) donde está dada. Pero entonces su función inversa es continuamente derivable $x = x(y)$ en cierto intervalo (c, d). Con ello

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\frac{M}{N}} = -\frac{N}{M},$$

lo que muestra que la función inversa satisface la ecuación diferencial (3).

Pues, resulta que si ambas funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ se distinguen de cero en todos los puntos de Ω, toda solución de la ecuación (1) en la forma $y = y(x)$ tiene la función inversa $x = x(y)$ que es asimismo la solución de esta ecuación, pero en la forma $x = x(y)$.

1. Ecuaciones de variables separadas. La ecuación (1) se llama ecuación diferencial de primer orden con *variables separadas* si

$$M(x, y) = \varphi(x), \quad x \in (a, b),$$
$$N(x, y) = \psi(y), \quad y \in (c, d).$$

Tiene la forma

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0. \tag{4}$$

Abajo supondremos que $\varphi(x)$ y $\psi(y)$ son funciones continuas. Vamos a admitir que $y = y(x)$ es la solución de la ecuación diferencial (4) en el rectángulo

$$\Delta = \begin{Bmatrix} a < x < b \\ c < y < d \end{Bmatrix},$$

definido en cierto intervalo $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

Entonces tiene lugar la identidad

$$\varphi(x)\,dx = -\psi[y(x)]\,dy(x), \quad x \in (\alpha, \beta),$$

de donde, integrando, obtenemos

$$\int \varphi(x)\,dx = -\int \psi[y(x)]\,dy(x) + C_1 = -\int \psi(y)\,dy + C.$$

Aquí las integrales $\int \varphi(x)\,dx$ y $\int \psi(y)\,dy$ son ciertas primitivas de $\varphi(x)$ y $\psi(y)$ escogidas por nosotros:

$$\int \varphi(x)\,dx = \Phi(x), \quad a < x < b,$$

$$\int \psi(x)\,dy = \Psi(y), \quad c < y < d,$$

en la segunda igualdad se ha efectuado la sustitución de la variable $y(x) = y$ en la integral indefinida (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 5.2); la constante C depende de la solución $y(x)$.

Así, pues, toda solución $y(x)$ de nuestra ecuación diferencial en el rectángulo indicado satisface la ecuación

$$\int \varphi(x)\,dx + \int \psi(y)\,dy = C$$

para cierta constante C o bien la ecuación

$$\Phi(x) + \Psi(y) = C. \tag{5}$$

El primer miembro de la igualdad (5) es la función $F(x, y)$, continuamente derivable sobre el rectángulo

$$\Delta = \{a < x < b, \ c < y < d\},$$

que tiene las propiedades

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \psi(y).$$

Si derivamos formalmente (5) respecto a x, suponiendo que $y = y(x)$, obtenemos

$$\varphi(x) + \psi(y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

o sea, la ecuación diferencial inicial (4).

Ahora bien, la igualdad (5) es la integral general de la ecuación diferencial (4) para sus soluciones cuya forma es $y = y(x)$. Conforme al teorema 1 del § 1.2, en la ecuación (5) todas las soluciones $y = y(x)$, continuamente derivables en (α, β), son, para cualesquiera constantes C, las soluciones de la ecuación diferencial (4) que tienen la forma $y = y(x)$ y al revés. Además, la afirmación inversa la hemos demostrado directamente.

Si razonamos de manera análoga, cambiando de lugar el papel de x e y, volveremos a obtener la igualdad (5); sin embargo, ahora será la integral general, que contiene todas las soluciones posibles de forma $x = x(y)$, $y \in (\gamma, \delta) \subset (c, d)$, de nuestra ecuación diferencial (4).

Así, pues, la igualdad (5) será la integral general de la ecuación diferencial (4) tanto para las soluciones de forma $y = y(x)$ como para las de forma $x = x(y)$.

EJEMPLO 1. $x^2\,dx = y\,dy$, $\Delta = \{a < x < b,\ c < y < d\}$.

$$\int x^2\,dx - \int y\,dy = C; \quad \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = C,$$

o sea, la integral general.

EJEMPLO 2. $e^{x^2}\,dx = e^{y^2}\,dy$; $\int e^{x^2}\,dx - \int e^{y^2}\,dy = C$.

Estas integrales no pueden expresarse en funciones elementales. No obstante, consideramos resuelto este problema desde el punto de vista de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

II. Ecuaciones con variables separables. Si $M(x, y) = \varphi_1(x) \times \psi_1(y)$, $N(x, y) = \varphi_2(x)\,\psi_2(y)$, la ecuación (1) se llama ecuación con *variables separables*:

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx + \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy = 0. \tag{6}$$

Para aquellas (x, y) para las cuales $\varphi_2(x)\cdot\psi_1(y) \neq 0$ vamos a dividir por este producto el primero y segundo miembros de la ecuación (6). Entonces obtenemos una ecuación con variables separadas

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx + \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy = 0.$$

La integral general de esta ecuación se encuentra al igual que en el caso I. Sin embargo, pueden existir, además, las soluciones que pasan por los puntos (x_0, y_0) que satisfacen la ecuación $\varphi_2(x_0) \times \psi_1(y_0) = 0$.

III. Ecuaciones homogéneas. La función $M(x, y)$ se llama *homogénea de grado m* si para x, y cualesquiera y $t > 0$ se cumple la igualdad

$$M(tx, ty) = t^m M(x, y).$$

Si las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado m, la ecuación diferencial

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{7}$$

se denomina *homogénea*.

Se puede transformarla del modo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{M\left(x, |x| \frac{y}{|x|}\right)}{N\left(x, |x| \frac{y}{|x|}\right)} =$$

$$= -\frac{|x|^m M\left(\pm 1, \pm \frac{y}{x}\right)}{|x|^m N\left(\pm 1, \pm \frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

o sea,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{8}$$

donde f es cierta función de una variable.

En vez de y introduzcamos la nueva función z (de la x) por medio de la sustitución

$$y = x \cdot z, \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z.$$

Entonces

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z)$$

o bien

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Por consiguiente,

$$\ln\left|\frac{x}{C}\right| = \int \frac{dz}{f(z) - z} \quad (C \neq 0)$$

o bien

$$x = C \exp\left(\int \frac{dz}{f(z)-z}\right),$$

donde $C \neq 0$ es una constante arbitraria.

Señalemos una ecuación más general que la (8):

$$\frac{dy}{dx} = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right). \tag{9}$$

Puede ser resuelta por la sustitución

$$y = x^{\alpha} z; \quad \frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} z + x^{\alpha} \frac{dz}{dx};$$

entonces

$$\alpha x^{\alpha-1} z + x^{\alpha} \frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1} f(z). \quad x^{\alpha} \frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1} [f(z) - \alpha z], \quad \frac{dz}{f(z)-\alpha z} =$$

$$= \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|\frac{x}{C}\right| = \int \frac{dz}{f(z)-\alpha z} \quad (C \neq 0), \quad x = C \exp \int \frac{dz}{f(z)-\alpha z}, \tag{10}$$

donde $C \neq 0$ es la constante arbitraria.

EJEMPLO 3. $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$.

La ecuación dada es homogénea, ya que las funciones

$$M(x, y) = x^2 + y^2, \quad N(x, y) = xy$$

son homogéneas de grado $m = 2$. Hagamos la sustitución $y = zx$, $dy = z\,dx + x\,dz$. Entonces la ecuación se escribirá así:

$$(x^2 + z^2x^2)\,dx + x^2z\,(z\,dx + x\,dz) = 0$$

o bien

$$(1 + 2z^2)\,dx + zx\,dz = 0.$$

Dividiendo las variables, obtenemos

$$\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{1+2z^2}, \quad \ln\left|\frac{x}{C}\right| = -\frac{1}{4}\ln(1+2z^2), \quad x = \frac{C}{\sqrt[4]{1+2z^2}}.$$

Puesto que en este caso $z = y/x$, entonces

$$x^4 = \frac{C^4x^2}{x^2+2y^2}, \quad 2y^2 + x^2 = \frac{C^4}{x^2}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{C^4}{2x^2} - \frac{x^2}{2}}.$$

EJEMPLO 4.

$$y' = Ax^{\nu} + By^{\nu},$$

$$y' = x^{\nu}\left[A + B\frac{y^{\nu}}{x^{\nu}}\right] = x^{\nu}\left[A + B\left(\frac{y}{x^{\nu/\nu}}\right)^{\nu}\right]. \tag{11}$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación (9) si

$$\gamma + 1 = \frac{\gamma}{\nu}. \tag{12}$$

La ecuación (11) para $\gamma = -2$ y $\nu = 2$ (la condición (12) está cumplida) tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = Ax^{-2} + By^2$$

y su solución se escribe por la fórmula (10), donde

$$f(z) = A + Bz^2, \quad \alpha = \gamma + 1 = -1.$$

La ecuación obtenida es un caso particular de la *ecuación de Riccati*

$$y' = By^2 + R(x)$$

que no se integra en cuadraturas sino en los casos excepcionales. Hemos demostrado que para $R(x) = Ax^{-2}$ la ecuación de Riccati se resuelve en cuadraturas. Notemos que para $R(x) = \text{const}$ la ecuación de Riccati es una ecuación con variables separables.

Si $R(x) = Ax^{\alpha}$ y $\alpha = \alpha_n = -\frac{4n}{2n-1}$ (n es un número entero), entonces la sustitución

$$\frac{1}{\eta(\xi)} = x^2 y(x) + \frac{x}{B}, \quad \xi = x^{\alpha_n + 3} \quad (n \geqslant 1)$$

reduce la ecuación de Riccati a la forma

$$\eta' = -\frac{A}{\alpha_n + 3}\eta^2 - \frac{B}{\alpha_n + 3}\xi^{\alpha_{n-1}}.$$

Aplicando sucesivamente esta sustitución se puede reducir la ecuación inicial al caso $\alpha_0 = 0$ ($R(x) = \text{const}$).

No obstante, si $n \leqslant -1$, la sustitución

$$\frac{1}{y(x)} = \xi^2 \eta(\xi) + \frac{\alpha_n + 1}{A}\xi, \quad \xi = x^{-\alpha_n - 1},$$

reduce la ecuación a la forma

$$\eta' = \frac{A}{\alpha_n + 1}\eta^2 + \frac{B}{\alpha_n + 1}\xi^{\alpha_{n+1}}.$$

Usando esta sustitución un número necesario de veces, reduciremos la ecuación de Riccati al caso $\alpha_0 = 0$.

En todos los demás casos la ecuación de Riccati no se resuelve en cuadraturas.

EJEMPLO 5. $xy\,dy - (x^4 + y^2)\,dx = 0$.
Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4+y^2}{xy} = \frac{x^4\left(1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2\right)}{x^3 \cdot \frac{y}{x^2}} = x\frac{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}{\frac{y}{x^2}}.$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación (9) cuando $\alpha = 2$, $f(z) = (1 + z^2)/z$.

IV. Ecuación lineal. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x), \quad a < x < b, \tag{13}$$

donde $p(x)$, $f(x)$ son funciones continuas de x en un intervalo (a, b) se llama ecuación diferencial *lineal* de primer orden. La función incógnita $y(x)$ y su derivada entran en esta ecuación en primer grado linealmente.

Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = 0 \tag{14}$$

se denomina *homogénea* lineal y, respectivamente, la ecuación (13) se denomina *no homogénea* lineal.

La ecuación homogénea lineal tiene la solución $y(x) \equiv 0$. Es una ecuación con variables separables:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \quad (y \not\equiv 0), \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)\,dx \quad (C \neq 0),$$

$$y = C\exp\left(-\int p(x)\,dx\right). \tag{15}$$

Si en (15) permitimos que la constante C tome el valor nulo, entonces la fórmula (15) dará también la solución $y(x) \equiv 0$.

La fórmula (15) muestra que el gráfico de solución de una ecuación homogénea lineal se encuentra por encima del eje Ox si $C > 0$, o bien por debajo del eje Ox si $C < 0$.

Hemos llegado a la fórmula (15) utilizando el siguiente esquema. Hemos supuesto que la función $y = y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial (14), solución distinta de cero en todos los puntos de (a, b) y hemos llegado a la conclusión de que ella se define por la fórmula (15) para cierta C. Hay que tener en cuenta que la integral $\int p(x)\,dx$ designa cierta función primitiva de $p(x)$ en el intervalo (a, b), por eso también la solución que se da por la fórmula (15) está definida en (a, b). Es fácil comprobar que las funciones (15), para todo valor de C incluso si $C = 0$, son soluciones de la ecuación diferencial (14).

Queda por aclarar la cuestión acerca de la existencia de soluciones de nuestra ecuación diferencial que corten el eje x. Para esto podemos hacer uso del teorema 1 del § 1.2. Despejando C en la fórmula (15), obtenemos

$$C = y \exp\left(\int p(x)\,dx\right).$$

Es fácil comprobar que el segundo miembro de esta igualdad es la función de (x, y) que tiene las derivadas parciales continuas sobre la franja $\{-\infty < y < \infty,\ a < x < b\}$; también es fácil comprobar el hecho de que si derivamos esta igualdad respecto a x, suponiendo que $y = y(x)$, obtenemos la ecuación diferencial (14). Entonces, con arreglo al teorema 1 del § 1.2, la fórmula (15) contiene todas las soluciones de la ecuación (14). Ahora bien, *la ecuación lineal* (14) *no tiene soluciones que corten el eje x.*

La ecuación (13) suele resolverse por el *método de Bernoulli* que consiste en lo siguiente. Busquemos la solución en la forma del producto de dos funciones

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Tenemos $y' = uv' + u'v$. Sustituyendo los valores de y e y' en (13), obtenemos $uv' + u'v + p(x)\,uv = f(x)$ o bien $u(v' + p(x)\,v) + u'v = f(x)$.

Escojamos una función v de modo que $v' + p(x)\,v = 0$. Respecto a $v(x)$ tenemos la ecuación homogénea lineal, por lo tanto, según la fórmula (15) podemos escribir $v = \exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$. Para esta función v obtenemos $u'v = f(x)$, de donde

$$du = \frac{f(x)}{v(x)}\,dx,$$

$$u = \int \frac{f(x)}{v(x)}\,dx + C = \int f(x) \exp\left(\int p(x)\,dx\right) dx + C.$$

Por consiguiente, la solución general, o sea cualquiera, de la ecuación (13) se escribe en la forma

$$y = u \cdot v = C \exp\left(-\int p(x)\,dx\right) + \exp\left(-\int p\,dx\right) \int f(x) \exp\left(\int p\,dx\right) dx, \qquad (16)$$

donde C es una constante arbitraria.

La fórmula (16) muestra que la solución general de una *ecuación no homogénea lineal es igual a la suma de la solución de la ecuación homogénea correspondiente y de la solución particular de la ecuación no homogénea* (que se obtiene de (16) cuando $C = 0$).

Recomendamos no aplicar formalmente la fórmula (16) y en cada ejemplo repetir todos los cálculos.

EJEMPLO 6. Resolver la ecuación $y' - y = \operatorname{sen} x$.

Aquí $p(x) = -1$, $f(x) = \operatorname{sen} x$. Pongamos $y = u \cdot v$,

$$y' = u'v + u \cdot v', \quad uv' + u'v - uv = \operatorname{sen} x,$$

$$u(v' - v) + u'v = \operatorname{sen} x, \quad v' - v = 0, \quad v = \exp \int dx = e^x,$$

$$u'e^x = \operatorname{sen} x, \quad u' = e^{-x} \operatorname{sen} x, \quad u = \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx + C;$$

$$y = e^x \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx + Ce^x.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$y = Ce^x - \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x).$$

Observación. La ecuación (13) se puede resolver asimismo por el *método de variación de una constante arbitraria.* Si C es una constante, la fórmula (15) ofrece la solución de la ecuación homogénea. Supongamos que C es la función de x y escojámosla de modo que la expresión $y = C(x) \exp\left(-\int p(x)\, dx\right)$ sea la solución de la ecuación (13). Es el mismo método de Bernoulli para $u = C(x)$, $v = \exp \times \left(-\int p(x)\, dx\right)$.

Ecuación de Bernoulli [1])

$$y' + p(x)\, y = y^\alpha f(x), \tag{17}$$

donde α es un número real cualquiera.

Si α es igual a cero o a la unidad, obtenemos una ecuación diferencial lineal. Si $\alpha \neq 0, 1$, la sustitución de $z = y^{1-\alpha}$ vuelve a conducirnos a una ecuación lineal respecto a la función $z(x)$.

La ecuación de Bernoulli se puede resolver directamente por el método de Bernoulli, suponiendo $y = u(x) \cdot v(x)$. Señalemos que cuando $\alpha > 0$ la función $y(x) \equiv 0$ es la solución de la ecuación de Bernoulli.

---

[1]) J. Bernoulli (1654—1705), célebre matemático suizo.

§ 1.4. Teorema de existencia de la solución de una ecuación diferencial de primer orden

La clase de ecuaciones diferenciales que podemos efectivamente resolver es muy estrecha. Por ejemplo, la solución de la ecuación diferencial que parece sencilla a primera vista

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

no puede ser reducida, como resulta, incluso a las cuadraturas (integrales). Por eso nos vemos obligados, las más de las veces, a resolver ecuaciones diferenciales de un modo aproximado.

Antes de aplicar un método aproximado cualquiera, es necesario saber si existe o no en realidad una solución de la ecuación diferencial. Muy importante también es saber de antemano si esta solución es la única o no.

A continuación formulamos las condiciones que garantizan la existencia y la unicidad de la solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

para la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Tiene lugar el teorema siguiente.

TEOREMA 1. *Supongamos que la función $f(x, y)$ es continua sobre el rectángulo*

$$D = \{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$$

y tiene en éste una derivada acotada $\frac{\partial f}{\partial y}$ que satisface la desigualdad

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N. \tag{3}$$

Entonces sobre el segmento $\sigma = [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$, donde

$$\delta < \min\left\{a,\ \frac{1}{N},\ \frac{b}{M}\right\},\quad M = \max_{(x,\ y) \in D} |f(x, y)|, \tag{4}$$

existe una solución, y sólo una, de la ecuación (1) que satisface la condición inicial (2).

En este caso se cumple la inecuación

$$|y(x) - y_0| \leqslant b,\quad \forall\, x \in \sigma.$$

La solución $y(x)$ es continuamente derivable sobre el segmento σ. Y si $f(x, y)$ tiene de hecho las derivadas parciales continuas de orden p respecto a x e y, entonces $y(x)$ tiene sobre el segmento σ las derivadas continuas hasta el orden $p + 1$ inclusive.

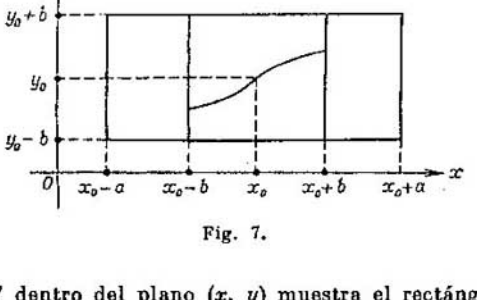

Fig. 7.

La fig. 7 dentro del plano (x, y) muestra el rectángulo D y el rectángulo que le pertenece

$$D_1 = \{x_0 - \delta < x \leqslant x_0 + \delta,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}.$$

El teorema afirma que si sobre el rectángulo D la función $f(x, y)$ es continua y tiene una derivada parcial acotada $\frac{\partial f}{\partial y}$ que satisface la desigualdad (3), por este punto (x_0, y_0) pasa una sola curva integral $y = y(x)$ determinada para todos los valores de $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Esta curva pertenece por completo al rectángulo D_1. El número δ satisface las relaciones (4).

Subrayemos que el teorema 1 garantiza la existencia del segmento determinado

$$\sigma = [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$$

en el cual existe, a ciencia cierta, la solución

$$y = y(x)$$

de la ecuación (1), solución que pasa por el punto (x_0, y_0).

Si necesitáramos hallar esta solución de un modo aproximado, entonces, al disponer de la información indicada, organizaríamos la obtención de la solución aproximada precisamente sobre este segmento σ, puesto que no se puede garantizar que la solución señalada quede determinada fuera de σ.

El teorema 1 será demostrado en el § 1.6 y ahora vamos a examinar un ejemplo.

EJEMPLO. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \tag{5}$$

es un caso particular de la ecuación diferencial (1).

Su segundo miembro no depende de x. En este caso la función $f(x, y)$ es igual a $-y^2$ cualesquiera que sea x.

Puesto que la función $-y^2$, para cualquier y, es continua junto con su derivada respecto a y, entonces la función $f(x, y)$ que se determina por ella será continua junto con su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ sobre todo en el plano (x, y). Por eso, sin resolver la ecuación (5), se puede concluir sobre la base del teorema de existencia que por todo punto (x_0, y_0) pasa una curva integral, y sólo una, de la ecuación (5).

Sean $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. Asignemos un rectángulo arbitrario

$$D = \{3 - a \leqslant x \leqslant 3 + a, \quad 1 - b \leqslant y \leqslant 1 + b\} \quad (0 < a, b)$$

Para este rectángulo

$$M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)| = \max_{y \in [1-b, 1+b]} |-y^2| = \max_{1-b \leqslant y \leqslant 1+b} y^2 = (1+b)^2;$$

$$N = \max_{(x, y) \in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_{1-b \leqslant y \leqslant 1+b} |-2y| = 2(1+b).$$

Por consiguiente,

$$\delta < \min\left\{a, \frac{1}{2(1+b)}, \frac{b}{(1+b)^2}\right\} < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

La ecuación (5) se resuelve fácilmente. Su integral general en el semiplano superior $(y > 0)$ y en el semiplano inferior $(y < 0)$ se define por la igualdad

$$y = \frac{1}{x - C}. \tag{7}$$

Existe una solución más: $y \equiv 0$, pero no nos interesará.

Entre las soluciones (7) escojamos la que pasa por el punto (3, 1). Evidentemente, ésta es la solución

$$y = \frac{1}{x - 2}.$$

Su gráfico está representado en la fig. 8. Vemos que la curva integral de la ecuación (5) que pasa por el punto $A = (3, 1)$ tiende hacia el infinito cuando $x \to 2$.

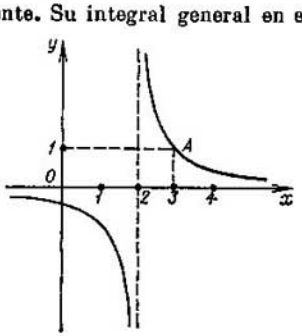

Fig. 8.

El intervalo máximo, con el centro en el punto $x = 3$, en el cual está determinada nuestra curva integral es el intervalo $(2, 4)$. La relación (6) obtenida del teorema general de existencia ofrece un intervalo un poco menor.

El teorema de existencia de la solución de una ecuación diferencial será demostrado partiendo de las consideraciones generales que se refieren a la teoría de los espacios métricos. El párrafo siguiente será dedicado a esta teoría.

§ 1.5. Espacio métrico

Sea M un conjunto de elementos $x, y, z, \ldots$ de una naturaleza arbitraria.

El conjunto M se llama *espacio métrico* si a cada par de sus elementos le corresponde un número no negativo $\rho(x, y)$, que se denomina *distancia* entre los elementos x e y, y que satisface las propiedades siguientes (*axiomas de la distancia*):

1) $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall\, x, y, z \in M$.

La axioma (3) suele llamarse *desigualdad triangular*. La función $\rho(x, y)$ de dos argumentos x, y la llamaremos, además *métrica* del espacio M.

Es fácil ver que el espacio de n dimensiones R_n con la métrica

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, es un espacio métrico.

El conjunto $C[a, b]$ de todas las funciones continuas dadas en $[a, b]$ será un espacio métrico si la métrica se introduce por la fórmula

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|. \tag{1}$$

Las axiomas de la distancia se comprueban fácilmente.

En adelante la expresión $\{x^n\}$ designará cierta sucesión de elementos $x^n \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ahora bien, x^n denota el elemento que lleva el número de orden n y no la potencia del elemento x.

El elemento $x^0 \in M$ es el límite $\{x^n\}$, si

$$\rho(x^n, x^0) \to 0, \quad n \to \infty.$$

En este caso la sucesión $\{x^n\}$ se llama *convergente*.

La sucesión $\{x^n\}$ se denomina *fundamental* si $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N$ tal que

$$\rho(x^m, x^n) < \varepsilon$$

cuando $m, n > N$.

Si la sucesión $\{x^n\}$ converge hacia $x^0 \in M$, entonces ella es fundamental. En efecto, del hecho de que $\{x^n\}$ converge hacia x^0 resulta que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe N tal que $\rho(x^n, x^0) < \varepsilon$, $\forall n > N$. Por eso sobre la base de la desigualdad triangular

$$\rho(x^n, x^m) \leqslant \rho(x^n, x^0) + \rho(x^0, x^m) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

cuando $m, n > N$.

La afirmación inversa no siempre es justa. Por ejemplo, si $M = (0, 1)$ es un intervalo $0 < x < 1$ y $\rho(x, y) = |x - y|$, entonces $\{1/n\}$ es una sucesión fundamental. No obstante, ella no converge hacia un elemento del espacio M (converge hacia cero que no pertenece a M).

El espacio métrico M se llama *completo* si en éste toda sucesión fundamental converge hacia un elemento de este mismo espacio.

Sabemos que el espacio unidimensional R_1 (de los números) es completo (¡criterio de Cauchy!). Se puede demostrar que también el espacio R_n es completo cuando $\forall n \geqslant 1$.

TEOREMA 1. *El espacio $C[a, b]$ es completo.*

DEMOSTRACION. Supongamos que los elementos de este espacio $\{f_n(t)\}$ forman una sucesión fundamental en el significado de la métrica (1): para todo $\varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que

$$\rho(f_n, f_m) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \tag{2}$$

cuando $m, n > N$.

De (2) se deduce que para un número fijo $t \in [a, b]$

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad (n, m > N). \tag{3}$$

Esto último significa que la sucesión numérica $\{f_n(t)\}$ es fundamental, por eso, sobre la base del criterio de Cauchy, converge hacia cierto número real que designamos por $f(t)$:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t), \quad \forall t \in [a, b]. \tag{4}$$

Pasando al límite en la desigualdad (3) cuando $m \to \infty$, obtenemos

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon, \quad n > N, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{5}$$

De aquí

$$\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon, \quad n > N. \tag{6}$$

Esto muestra que la sucesión $\{f_n(t)\}$ converge *uniformemente* hacia $f(t)$ en $[a, b]$ y puesto que las funciones $f_n(t)$ son continuas en $[a, b]$, la función límite $f(t)$ también es continua en $[a, b]$ [1], o sea, $f(t) \in C[a, b]$. El teorema queda demostrado.

[1] Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 9.8, teorema 2.

Observación. Ahora en la desigualdad (6) se puede sustituir el símbolo sup por máx.

Supongamos que en el espacio métrico completo M se da un operador que aplica M en sí

$$z = Fx \quad (x \in M,\ z \in M).$$

Llamaremos *contractivo* al operador F si

$$\rho\ (Fx,\ Fy) \leqslant \alpha\rho\ (x,\ y),\ \forall x,\ y \in M,\ \ 0 \leqslant \alpha < 1,$$

donde el número $x \in M$ se denomina *punto fijo* del operador F, si $Fx = x$.

Llamaremos al operador F *continuo* en el punto x^0, si

$$\lim_{x^n \to x^0} Fx^n = Fx^0$$

(o sea, $\rho\ (Fx^n,\ Fx^0) \to 0,\ n \to \infty,\ \forall\, x^n \to x^0$).

Es fácil ver que un operador contractivo es siempre continuo en cualquier punto $x^0 \in M$

$$\rho\ (Fx^n,\ Fx^0) \leqslant \alpha\rho\ (x^n,\ x^0) \to 0, \quad n \to \infty.$$

TEOREMA 2. *Si un operador contractivo F aplica en sí un espacio métrico completo M, entonces existe un único punto fijo de este operador.*

Este teorema se denomina *principio de aplicaciones contraídas.*

DEMONTRACIÓN. Demostremos que no pueden existir dos puntos fijos. Sean x^1, x^2 puntos fijos: $Fx^1 = x^1$, $Fx^2 = x^2$. Entonces

$$\rho\ (x^1,\ x^2) = \rho\ (Fx^1,\ Fx^2) \leqslant \alpha\rho\ (x^1,\ x^2) \quad (\alpha < 1). \tag{7}$$

Si suponemos que $\rho\ (x^1,\ x^2) > 0$, entonces de (7) obtenemos $\alpha \geqslant 1$ lo cual no puede ser. Por lo tanto, $\rho\ (x^1,\ x^2) = 0$ y $x^1 = x^2$.

Pasamos a la demostración de la existencia de un punto fijo.

Sea x^0 un punto cualquiera del espacio M. Escribamos la sucesión de los elementos:

$$x^0,\ x^1 = Fx^0,\ \ x^2 = Fx^1,\ \ldots,\ \ x^n = Fx^{n-1},\ \ldots$$

Esta sucesión la llamaremos *iterativa*, engendrada por el operador F. Mostremos que es fundamental. Tenemos

$$\rho\ (x^n,\ x^{n-1}) = \rho\ (Fx^{n-1},\ Fx^{n-2}) \leqslant \alpha\rho\ (x^{n-1},\ x^{n-2}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^2\rho\ (x^{n-2},\ x^{n-3}) \leqslant \ \ldots \leqslant \alpha^{n-1}\rho\ (x^1,\ x^0),\ \ (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{8}$$

Luego, sobre la base de la desigualdad triangular y (8), obtenemos $(n > m)$

$$\rho\ (x^n,\ x^m) \leqslant \rho\ (x^n,\ x^{n-1}) + \rho\ (x^{n-1},\ x^{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + \rho\ (x^{m+1},\ x^m) \leqslant [\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha^m]\ \rho\ (x^1,\ x^0).$$

Puesto que por la condición $0 \leqslant \alpha < 1$, entonces

$$\rho(x^n, x^m) \leqslant [\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots] \rho(x^1, x^0) = \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \rho(x^1, x^0) \to 0$$

cuando $m \to \infty$, ya que $\rho(x^1, x^0)$ es un número finito.

Así, pues, la sucesión $\{x^n\}$ es fundamental y puesto que el espacio M es completo, ella converge hacia cierto elemento $\bar{x}$ de este espacio

$$\lim_{n \to \infty} x^n = \bar{x} \in M.$$

Vamos a demostrar que $\bar{x}$ es un punto fijo:

$$\rho(F\bar{x}, \bar{x}) \leqslant \rho(F\bar{x}, x^n) + \rho(x^n, \bar{x}) = \rho(F\bar{x}, Fx^{n-1}) +$$

$$+ \rho(x^n, \bar{x}) \leqslant \alpha\rho(\bar{x}, x^{n-1}) + \rho(x^n, \bar{x}) < \varepsilon$$

cuando $n > N = N(\varepsilon)$.

Ahora bien, $\rho(\bar{x}, F\bar{x}) = 0$ y según el primer axioma de la distancia sacamos la conclusión de que $F\bar{x} = \bar{x}$, o sea, $\bar{x}$ es un punto fijo El teorema queda demostrado.

Observación. Utilizando el hecho de que $\bar{x}$ es un punto fijo, obtenemos

$$\rho(\bar{x}, x^n) = \rho(F\bar{x}, Fx^{n-1}) \leqslant \alpha\rho(\bar{x}, x^{n-1}) =$$

$$= \alpha\rho(F\bar{x}, Fx^{n-2}) \leqslant \alpha^2\rho(\bar{x}, x^{n-2}) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n\rho(\bar{x}, x^0). \quad (9)$$

Luego

$$\rho(x^n, \bar{x}) \leqslant \rho(x^n, x^{n+1}) + \rho(x^{n+1}, \bar{x}) \leqslant \alpha\rho(x^{n-1}, x^n) + \alpha\rho(x^n, \bar{x}),$$

de donde

$$\rho(x^n, \bar{x}) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{n-1}, x^n) \quad (0 \leqslant \alpha < 1) \quad (10)$$

Las fórmulas (9) y (10) muestran que x^n es un valor aproximado del punto fijo con un error que no excede de $\alpha^n\rho(\bar{x}, x^0)$ y $\frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{n-1}, x^n)$.

Prestemos atención a la fórmula (10) que ofrece la estimación de la distancia entre x^n y $\bar{x}$ por medio de la distancia entre dos puntos vecinos x^n y x^{n-1}. Tomando x^n como valor aproximado de $\bar{x}$, garantizamos que el error de la aproximación es menor que el segundo miembro (10).

EJEMPLO. Supongamos que la función $f(x)$ tiene la raíz (cero) en un segmento $[a, b]$. Vamos a admitir que f tiene las derivadas de los órdenes primero y segundo y $f'(x) \neq 0$ en $[a, b]$, o sea, $f(x)$ es monótona en este segmento. Esto quiere decir que en $[a, b]$ hay una raíz de la función f.

Compongamos la función auxiliar

$$F(x) = x + k(x) \cdot f(x),$$

donde $k(x)$ es cierta función continuamente derivable, no igual a cero. Claro está que el punto fijo $\overline{x}$ de la función F es el cero de f y al revés.

Por eso, si la función F aplica $[a, b]$ en $[a, b]$ y es contractiva sobre $[a, b]$, la sucesión iterativa $x_n = F(x_{n-1})$ converge hacia el punto fijo $\overline{x}$ (o sea, hacia la raíz f) y x_n se puede tomar como valor aproximado de la raíz. Para diferentes $k(x)$ tenemos diferentes métodos aproximados de cálculo de la raíz de la función $f(x)$.

Examinemos una función concreta $f(x) = x^3 + x - 1$ y nos propongamos a calcular aproximadamente la raíz de esta función con una exactitud hasta 0,01. Tenemos $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Por consiguiente, en el segmento $[0, 1]$ hay una sola raíz de $f(x)$. Pongamos $k(x) = -1/f'(x) < 0$. Entonces

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{2x^3+1}{3x^2+1}$$

Aclaremos si es contractiva o no esta función. Por el teorema de Lagrange obtenemos

$$\rho(F(x), F(y)) = |F(x) - F(y)| = |F'(\xi)| \cdot |x - y| \leqslant \alpha\rho(x, y),$$

donde

$$\alpha = \max_x |F'(x)| = \max_x \left| \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^3} \right| = \max_x \left| \frac{(x^3+x-1) 6x}{(3x^2+1)^3} \right|$$

Para el segmento $[1/2, 3/4] \subset [0, 1]$

$$\alpha = \max_{1/2 \leqslant x \leqslant 3/4} |F'(x)| = F'(1/2) = \frac{18}{49} < 1$$

y los valores de la función F no salen fuera de los límites $[1/2, 3/4]$:

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{2x^3+1}{3x^2+1} \leqslant \frac{3}{4}, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right].$$

Así, pues, en $[1/2, 3/4]$ la función $F(x)$ es contractiva. Sea $x_0 = 11/16 \in [1/2, 3/4]$, entonces $x_1 = F(x_0) = 3379/4952$ y

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0) = \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_1 - x_0| \leqslant \frac{18}{31} \left| \frac{3379}{4952} - \frac{11}{16} \right| = \frac{18 \cdot 51}{31 \cdot 2 \cdot 4952} < \frac{1}{300} < 0{,}01.$$

Basándose en (10), se puede tomar x_1 como valor aproximado de la raíz de la función $f(x)$ con una exactitud hasta 0,01 (en realidad, con una exactitud hasta 0,003).

Observación. El método aproximado de calcular la raíz de la función $f(x)$ ($x_n \approx \overline{x}$) para $k(x) = -1/f'(x)$ lleva el nombre de *método de Newton* o *método de tangentes*. Los elementos de la sucesión

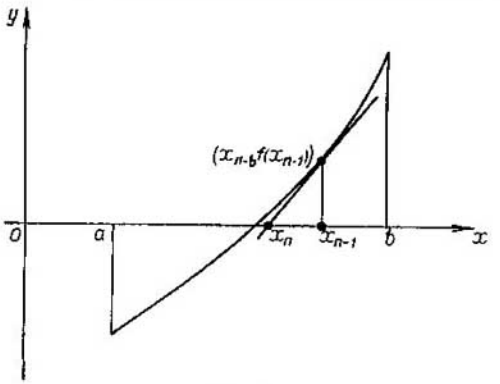

Fig. 9.

iterativa $\{x_n\}$ se pueden obtener a partir de consideraciones geométricas.

Si $x_{n-1} \in [a, b]$ ya se ha determinado, para obtener x_n en el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ del gráfico de la función f trazamos la tangente. Tomemos el punto de intersección de esta tangente con el eje x por x_n (fig. 9). La ecuación de la tangente tiene la forma

$$Y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

Poniendo en esta igualdad $Y = 0$, encontramos la solución $x = x_n$, donde

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ahora bien, los números x_n son los elementos de la sucesión iterativa para la función $F(x) = x - (f(x)/f'(x))$.

PROBLEMA 1. La función $F(x) = x^2$ aplica R_1 en sí y tiene dos puntos fijos $x = 0$ y $x = 1$. ¿Por qué?

PROBLEMA 2. El operador de aplicación especular del plano x_1Ox_2 respecto al eje Ox_1 tiene la forma $Fx = (x_1, -x_2)$, $x = (x_1, x_2)$. ¿Qué puntos del plano son fijos para este operador?

§ 1.6. Demostración del teorema de existencia de la solución de una ecuación diferencial de primer orden

Supongamos que se da la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

donde la función $f(x, y)$ es continua sobre el rectángulo

$$D = \{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$$

y tiene una derivada parcial acotada $\frac{\partial f}{\partial y}$ que satisfaga la desigualdad $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N$.

Es preciso demostrar que en el segmento $\sigma = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ existe una solución, y sólo una, $y = y(x)$ de la ecuación diferencial (1) que satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

donde

$$\delta < \text{mín}\left\{a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M}\right\}, \qquad M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)| \tag{3}$$

Con ello $y(x)$ es continuamente derivable sobre σ. La ecuación diferencial (1) con la condición (2) es equivalente a la ecuación integral siguiente:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{4}$$

En efecto, supongamos que la función continua $y(x)$ es la solución de (4), entonces, derivando la identidad (4), obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \text{ y, evidentemente, } y(x_0) = y_0.$$

Ahora bien, la función $y(x)$ satisface la ecuación (1) con la condición (2).

Inversamente, supongamos que $y(x)$ es la solución de (1):

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), \quad x_0 \leqslant t \leqslant x; \quad y(x_0) = y_0.$$

Entonces, integrando esta identidad entre los límites x_0 y x, obtenemos

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy(t)}{dt}\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\,dt$$

o bien

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\,dt,$$

o sea, $y(x)$ es la solución de la ecuación (4).

A continuación investigaremos la ecuación (4).

Designemos por $\mathfrak{M}$ un conjunto de funciones continuas $y = y(x)$ que se dan en el segmento $\sigma = [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ y satisfacen en éste la desigualdad $|y(x) - y_0| \leqslant b$.

Introduzcamos en $\mathfrak{M}$ la distancia

$$\rho(y,\ z) = \max_{x \in \sigma} |y(x) - z(x)|,\ y,\ z \in \mathfrak{M}$$

Así, pues, $\mathfrak{M}$ es un espacio métrico. Es un espacio completo. Efectivamente, si la sucesión de funciones $y_n \in \mathfrak{M}$ satisface, en el significado de la métrica introducida, la condición de Cauchy (o sea, una sucesión fundamental), entonces, como sabemos, esta sucesión converge uniformemente sobre un segmento σ hacia cierta función $y = y(x)$ que es continua en este segmento (véase el § 1.5).

Para las funciones $y_n = y_n(x)$ se cumple la inecuación

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant b,\ x \in \sigma \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

la cual, después del paso al límite para $n \to \infty$, se conserva:

$$|y(x) - y_0| \leqslant b.$$

Pero entonces $y = y(x) \in \mathfrak{M}$ muestra que $\mathfrak{M}$ es un espacio completo.

La igualdad

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt, \quad y(x_0) = y_0, \tag{5}$$

hace corresponder a cada función $y = y(x) \in \mathfrak{M}$ cierta función $z = z(x) \in \mathfrak{M}$. En efecto, si $y \in \mathfrak{M}$, entonces $y = y(t)$ es una función continua cuyo gráfico pertenece al rectángulo

$$D_1 = \{x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\};$$

por eso, en virtud de la continuidad de $f(x, y)$ en el rectángulo D_1 el segundo miembro de la igualdad (5) es una función continua de x, o sea, $z = z(x)$ es una función continua en σ. Luego

$$|z(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt \right| \leqslant M |x - x_0| \leqslant M\delta < M \cdot \frac{b}{M} = b$$

lo que muestra que $z \in \mathfrak{M}$.

Así, pues, podemos suponer que la igualdad (5) define el operador

$$z = Fy, \quad y \in \mathfrak{M}, \quad z \in \mathfrak{M}$$

que aplica el espacio completo $\mathfrak{M}$ en el espacio completo $\mathfrak{M}$. Este operador es contractivo, porque si

$$z_1 = Fy_1, \quad z_2 = Fy_2, \quad y_1, y_2 \mathfrak{M},$$

entonces

$$|z_1(x) - z_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))]\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} [y_1(t) - y_2(t)]\, f'_y(t, \lambda(t))\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \rho(y_1, y_2)\, N\, dt \right| \leqslant \rho(y_1, y_2)\, \delta N = \alpha \rho(y_1, y_2), \quad (6)$$

donde el número $\alpha = \delta N$ satisface la desigualdad $0 \leqslant \alpha < 1$, porque según la condición $\delta < 1/N$. De (6) resulta que

$$\rho(z_1, z_2) = \max_{x \in \sigma} |z_1(x) - z_2(x)| \leqslant \alpha \rho(y_1, y_2).$$

Pero entonces, como sabemos, en $\mathfrak{M}$ (véase el § 1.5) existe la única función (punto fijo) $y = y(x) \in \mathfrak{M}$ para la cual

$$y = Fy$$

o, con otras palabras, la cual satisface la ecuación (4) y, por lo tanto, la ecuación (1) y la condición (2).

Aplicando el método de iteraciones, se puede obtener una solución aproximada de la ecuación (1):

$$y_n(x) = Fy_{n-1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt$$

$$(n = 1, 2, \ldots), \quad (7)$$

donde $y_0(x) \equiv y_0 \in \mathfrak{M}$.

A base de la fórmula (10) del § 1.5, la estimación de la aproximación tiene la forma

$$|y(x)-y_n(x)| \leqslant \frac{N\delta}{1-N\delta} \max_{x\in\sigma} |y_n(x)-y_{n-1}(x)|.$$

Existen también otros métodos aproximados de resolución del problema de Cauchy.

Muy sencillo es el método de Euler (véase el § 1.7).

Queda todavía por demostrar que si $f(x, y)$ tiene derivadas continuas respecto a x e y hasta el p-ésimo orden sobre el rectángulo D, entonces la solución indicada $y(x)$ de la ecuación (1) tiene derivadas continuas respecto a x hasta el orden $(p+1)$ sobre el segmento σ.

En efecto, tiene lugar la identidad

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in \sigma. \tag{8}$$

Puesto que la función $y(x)$ satisface la ecuación diferencial (1), ésta tiene en todos los puntos del segmento σ una derivada respecto a x y por eso es continua. Luego, según la condición $f(x, y)$ es continua respecto a x e y sobre el rectángulo D, por eso el segundo miembro de (8) es continuo respecto a x en σ. Por lo tanto, $y'(x)$ es también continua en σ.

Si $p \geqslant 1$, el segundo miembro de (8) tiene la derivada continua respecto a la variable x y el primer miembro de la identidad tiene, por consiguiente, la derivada continua respecto a x. Así, pues, la función $y(x)$ tiene la derivada continua de segundo miembro. De la identidad (8) hallamos

$$y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))\, y'(x). \tag{9}$$

Aplicando a la identidad (9) los razonamientos análogos a los anteriores, encontramos que para $p \geqslant 2$ la función $y(x)$ tiene la derivada continua de tercer orden en el segmento σ, etc.

§ 1.7. Método de Euler de resolución aproximada de la ecuación diferencial de primer orden

Supongamos que se da la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Admitamos que la función $f(x, y)$ en el entorno del punto (x_0, y_0) satisface las condiciones del teorema de existencia. Según este teorema existen un segmento $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ y una sola solución $y = y(x)$, definida en este segmento, de la ecuación (1), solución que satisface la condición $y(x_0) = y_0$.

Para el número δ el teorema ofrece una estimación por arriba

$$\delta < (a,\ 1/N,\ b/M).$$

El método de Euler [1]) permite expresar de un modo aproximado la función indicada, teóricamente con una precisión cualquiera asignada de antemano.

Supongamos que se necesita calcular aproximadamente $y(d)$, donde para precisar $x_0 < d < x_0 + \delta$. Dividamos $[x_0, d]$ en n partes iguales por los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n = d$. Llamaremos *paso de cálculo* a la longitud del segmento $[x_i, x_{i+1}]$, $h = x_{i+1} - x_i$. Designemos por y_i los valores aproximados de la solución en los puntos x_i.

En $[x_0, x_1]$ en vez de la ecuación (1) examina emos la ecuación con la condición inicial (problema de Cauchy)

$$Y_n'(x) = f(x_0, y_0) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1), \quad Y_n(x_0) = y_0.$$

La solución de esta ecuación tiene la forma

$$Y_n(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Tomemos precisamente esta función (lineal) por solución aproximada de la ecuación (1) en el segmento $[x_0, x_1]$. Desde el punto de vista geométrico esto quiere decir que hemos sustituido la curva integral buscada por el segmento de la tangente a la curva integral en el punto (x_0, y_0).

De la fórmula (2) obtenemos

$$y_1 = Y_n(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Luego razonamos por inducción. Si los valores aproximados de la solución $y_1, y_2, \ldots, y_k$ se conocen, entonces en $[x_k, x_{k+1}]$ en vez de la ecuación (1) examinamos la ecuación

$$Y_n'(x) = f(x_k, y_k) \quad (x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}), \quad Y_n(x_k) = y_k.$$

La solución de esta ecuación

$$Y_n(x) = y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{3}$$

la tomamos por solución aproximada de la ecuación (1) en $[x_k, x_{k+1}]$.

Poniendo en (3) $x = x_{k+1}$, obtenemos

$$y_{k+1} = Y_n(x_{k+1}) = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Son precisamente las fórmulas (4) que determinan el método de Euler.

[1]) L. Euler (1707—1783), gran matemático, miembro de la Academia de Ciencias de Rusia, de origen suizo.

La función $Y_n(x)$ que se define en $[x_0, d]$ con ayuda de las igualdades (3) se llama «*quebrada de Euler*» (fig. 10). Se puede demostrar que en las condiciones del teorema de existencia la sucesión de las

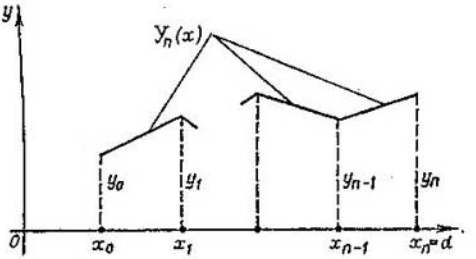

Fig. 10.

quebradas de Euler $\{Y_n(x)\}$ converge uniformemente en $[x_0, d]$ hacia la solución verdadera del problema cuando $n \to \infty$.

§ 1.8. Ecuaciones no resueltas con respecto a la derivada

Para resolver la ecuación diferencial

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

se puede intentar primeramente resolverla respecto a y'. Si esto se logra, obtenemos una o muchas ecuaciones diferenciales que tienen la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Toda solución de cada una de las ecuaciones (2) será la solución de la ecuación (1). Sin embargo, conviene procurar aclarar si abarcan ellas o no todas las soluciones de (1).

Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$(y')^2 - (2x + y)\, y' + 2xy = 0, \tag{3}$$

por medio de transformaciones idénticas de su primer miembro reduzcámosla a la forma

$$(y' - 2x)\,(y' - y) = 0. \tag{3'}$$

Examinemos dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y' = 2x, \quad y' = y.$$

Sus integrales generales tienen, respectivamente, la forma

$$y = x^2 + C_1, \quad y = C_2 e^x, \tag{4}$$

donde C_1 y C_2 son las constantes arbitrarias. Para los valores particulares de C_1 y C_2 las funciones (4) son las soluciones particulares de la ecuación (3).

Pero de las soluciones particulares indicadas de las dos últimas ecuaciones se pueden construir también otras soluciones particulares de la ecuación (3). Por ejemplo, la función

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leqslant 1, \\ 2e^{x-1}, & x > 1, \end{cases}$$

es una solución de la ecuación (3). Esta curva integral está compuesta de dos curvas integrales que pertenecen a familias diferentes de (4) (fig. 11).

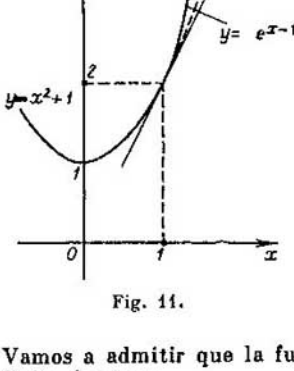

Fig. 11.

A continuación se examinan dos tipos particulares de la ecuación diferencial (1) para los cuales se puede indicar otros caminos de resolución.

1°. El primer miembro de la ecuación (1) no contiene x ni y:

$$F(y') = 0. \tag{5}$$

Vamos a admitir que la función F es continua y tiene un número finito de ceros.

Supongamos que $y = y(x)$ es la solución de la ecuación, solución cuya derivada es continua. Entonces $y'(x)$ es igual a una de las raíces de la ecuación (5), que designaremos por k. Así, pues, $y' = k$, de donde $y = kx + C$, donde C es la constante y

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \tag{6}$$

Y al contrario, del hecho de que para la función $y(x)$ continuamente derivable, cuando hay cierta constante C, se cumple la igualdad (5), resulta que

$$\frac{y - C}{x} = k, \quad \forall x \neq 0,$$

donde k es cierta raíz de la función F. Pero entonces $y = kx + C$, $\forall x$, $y' = k$ y $F(y') = 0$.

Hemos demostrado que una *solución general (cualquiera) de la ecuación diferencial* (5) *se define por la igualdad* (6), *donde C es la constante arbitraria.*

2°. El primer miembro de la ecuación (1) no contiene x:

$$F(y, y') = 0. \tag{7}$$

Si la ecuación (7) se puede resolver respecto a y', entonces $y' = \varphi(y)$ es la ecuación con variables separables que sabemos resolver.

Supongamos que la ecuación (7) no se puede o es difícil resolver respecto a y', pero se puede resolver fácilmente respecto a y: $y = \psi(y')$.

Introduzcamos en la investigación el parámetro $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, entonces

$$y = \psi(p), \quad dy = \psi'(p)\,dp, \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{\psi'(p)\,dp}{p},$$

de donde

$$x = \int \frac{\psi'(p)\,dp}{p} + C,$$

o bien

$$x = \psi(p) + C.$$

Ahora, eliminando del sistema

$$x = \psi(p) + C, \quad y = \psi(p) \tag{8}$$

el parámetro p, obtenemos precisamente la integral general $\Phi(x, y, C) = 0$ de la ecuación diferencial (7).

El sistema (8) se puede considerar asimismo como representación paramétrica de la solución de la ecuación (7). El parámetro p puede introducirse también de un modo arbitrario, $y' = \omega(p)$, pero de una manera tal que la ecuación (7) se resuelva más sencillamente respecto a y, $y = \varphi(p)$ y se encuentre más sencillamente la integral respectiva para la determinación de la función

$$x = \int \frac{\psi'(p)\,dp}{\omega(p)} + C.$$

EJEMPLO. Resolver la ecuación $x\sqrt{1 + y'^2} = 2y'$.

Si se introduce el parámetro $p = y'$, se obtienen integrales bastante complejas. Aquí es mejor poner $y' = \operatorname{tg} p$ $(-\pi/2 < p < \pi/2)$. Entonces

$$x = \frac{2 \operatorname{tg} p}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 p}} = 2 \operatorname{sen} p, \quad dx = 2 \cos p\,dp.$$

$$dy = \operatorname{tg} p\,dx = 2 \operatorname{sen} p\,dp, \qquad y = -2 \cos p + C.$$

Del sistema

$$x = 2 \operatorname{sen} p, \quad y = -2 \cos p + C$$

obtenemos

$$x^2 + (y - C)^2 = 4, \tag{4}$$

o sea, una solución cualquiera de nuestra ecuación diferencial es la solución de la ecuación (4) para cierta constante C. Es una familia de circunferencias de radio 2 que tienen por centro los puntos $(0, C)$ (fig. 12). Se puede demostrar que la igualdad (4) es la integral general para las soluciones cuyas formas son $y(x)$ y $x(y)$.

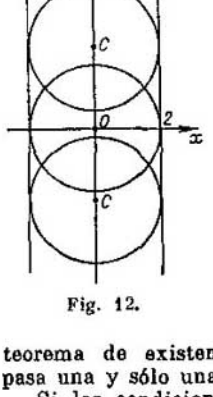

Fig. 12.

En el caso dado se puede asimismo introducir el parámetro por la fórmula $y' = \operatorname{sh} p$.

Observación. De un modo análogo se examina la ecuación diferencial que tiene la forma $F(x, y') = 0$.

§ 1.9. Soluciones singulares

Supongamos que se da la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Si en el entorno del punto (x_0, y_0) del plano xOy se cumplen las condiciones del teorema de existencia y de unicidad, entonces por este punto pasa una y sólo una curva integral.

Si las condiciones del teorema de existencia no se observan, entonces pueden haber diferentes casos. Por el punto (x_0, y_0) puede pasar una o varias curvas integrales o un conjunto infinito de éstas, o bien no hay una curva integral que pase por este punto (x_0, y_0). Es interesante el caso cuando la ecuación diferencial (1) tiene una solución singular.

La solución de una ecuación diferencial de primer orden se llama *singular* si la curva integral respectiva posee la propiedad de que por cualquier punto suyo pasa, además de ella, otra curva integral de la ecuación dada, siendo la última curva tangente a la primera.

Frecuentemente nos vemos obligados a examinar las ecuaciones diferenciales de la forma (1), donde la función $f(x, y)$ es continua sobre cierta región Ω y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ es finita y continua no en todos los puntos de Ω. Existen sobre la región Ω asimismo tales puntos donde $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$. En general, en cada tal punto se infringen las condiciones de existencia y de unicidad de la solución de la ecuación diferencial (1) y si tales puntos forman líneas suaves, estas últimas pueden representar soluciones singulares de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1. Examinemos la ecuación elemental de Bernoulli $y' = y^\alpha$, $\alpha > 0$, $y \geqslant 0$. Aquí $f(x, y) = y^\alpha$ es la función continua sobre el semiplano superior. La función $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha y^{\alpha-1}$ para $0 < \alpha < 1$ no está acotada en el entorno de $y = 0$. La función $y = 0$ es la solución de la ecuación. Para la condición inicial $y(x_0) = 0$ existe una solución más

$$y = [(x - x_0)(1 - \alpha)]^{1/(1-\alpha)}$$

que satisface esta ecuación y pasa por el punto $(x_0, 0)$. La tangente a esta curva en el punto $(x_0, 0)$ es, evidentemente, el eje x ($y \equiv 0$). Por eso $y \equiv 0$ es la solución singular.

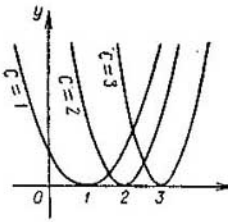

Fig. 13.

EJEMPLO 2. $y' = y^\alpha + 1$, $y \geqslant 0$.

Aquí $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha y^{\alpha-1}$ y cuando $0 < \alpha < 1$ esta función no está acotada en el entorno de $y = 0$. No obstante, $y \equiv 0$ no es la solución de la ecuación. La solución de la ecuación, por ejemplo para $\alpha = 1/2$, se define implícitamente por la igualdad $x + C = 2(\sqrt{y} - \ln(\sqrt{y} + 1))$ ($y \geqslant 0$), o sea, por todo punto $(x_0, 0)$ pasa una sola curva integral $x - x_0 = 2(\sqrt{y} - \ln(\sqrt{y} + 1))$.

EJEMPLO 3. Las funciones $y = C(x - C)^2$, para cualquier valor de C (fig. 13), son las soluciones de la ecuación $F(x, y, y') \equiv 4xyy' - y'^3 - 8y^2 = 0$. La función $y \equiv 0$ es la solución singular de la ecuación dada.

§ 1.10. Envolvente de una familia de curvas

Supongamos que está dada una familia de curvas suaves Γ_α definidas por la ecuación

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0, \tag{1}$$

donde la constante arbitraria α es el parámetro y la función $\Phi(x, y, \alpha)$ es continuamente derivable sobre cierta región de puntos (x, y, α).

La curva E se llama *envolvente* de la familia de curvas (1) si es tangente a cada una de las curvas Γ_α de la familia y, además, toda consta de estos puntos de tangencia.

Más exactamente, se denomina *envolvente* E de la familia de curvas Γ_α dependientes del parámetro α, donde $a < \alpha < b$, la curva suave

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\alpha), \\ y &= y(\alpha) \end{aligned}\right\} \quad a < \alpha < b \tag{2}$$

que es tangente, para un valor cualquiera del parámetro α, a la curva respectiva Γ_α.

Llamaremos curvas *envueltas* a las curvas Γ_α (fig. 14).

Hallemos la ecuación de la envolvente. Prefijemos el valor α. Le corresponde sobre Γ_α el punto $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$ que pertenece simultáneamente a Γ_α y E y en el cual E y Γ_α tienen una tangente común.

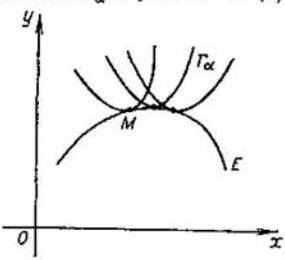

Fig. 14.

Es evidente que tiene lugar la identidad

$$\Phi(x(\alpha),\ y(\alpha),\ \alpha) \equiv 0, \quad a < \alpha < b.$$

Derivémosla respecto a α:

$$\Phi'_x x'(\alpha) + \Phi'_y y'(\alpha) + \Phi'_\alpha = 0, \quad a < \alpha < b.$$

El vector $(x'(\alpha),\ y'(\alpha))$ está orientado por la tangente a E que coincide con la tangente a Γ_α en el punto $(x(\alpha),\ y(\alpha))$. Pero entonces (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 8.16)

$$\Phi'_x x'(\alpha) + \Phi'_y y'(\alpha) = 0.$$

Por consiguiente,

$$\Phi'_\alpha(x(\alpha),\ y(\alpha),\ \alpha) = 0,$$

o sea,

$$\Phi'_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = 0 \tag{3}$$

en el punto $(x,\ y)$ de tangencia de E con Γ_α. Para este punto se cumple asimismo la igualdad

$$\Phi(x,\ y,\ \alpha) = 0 \tag{4}$$

Ahora bien, la ecuación de la envolvente de la familia (1) se define por dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x,\ y,\ \alpha) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(x,\ y,\ \alpha)}{\partial \alpha} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Las igualdades (5) ofrecen la condición necesaria de existencia de la envolvente, o sea, si la familia (1) tiene la envolvente, su ecuación se da por el sistema (5).

Sin embargo, si componemos el sistema (5) y lo resolvemos, la solución del sistema ofrece la envolvente de la familia (1) de un modo no obligatorio.

Supongamos ahora que se da la ecuación diferencial $F(x,\ y,\ y') = 0$ y $\Phi(x,\ y,\ C) = 0$ es su integral general.

Si la familia de curvas integrales $\Phi(x,\ y,\ C) = 0$ tiene una *envolvente*, entonces, claro está, que es también la curva integral y, por consiguiente, la *solución singular*.

Si C se excluye formalmente del sistema

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x,\ y,\ C) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(x,\ y,\ C)}{\partial C} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

entonces en algunos casos obtenemos la solución singular.

Si la integral general de la ecuación diferencial tiene la forma

$$\Psi(x, y) = C,$$

donde $\Psi(x, y)$ es la función continuamente derivable, entonces la familia que se define por ella (o sea, la familia de todas las soluciones de la ecuación diferencial) sobre la región respectiva no tiene una envolvente (véase el teorema 1, § 1.2).

Si la función $\Psi(x, y)$ no es continuamente derivable en ciertos puntos (x, y), el conjunto de estos puntos puede determinar la envolvente de la familia.

EJEMPLO 1. $y' = y^{2/3}$.

Esta es la ecuación de Bernoulli. Dividiendo las variables, obtenemos $y^{-2/3}\,dy = dx$ $(y \neq 0)$, $3y^{1/3} = x - C$, $27y = (x - C)^3$, $\Phi(x, y, C) \equiv 27y - (x - C)^3 = 0$, o sea, la integral general, donde la función $\Phi(x, y, C)$ es continuamente derivable.

Planteemos el sistema (6):

$$\left.\begin{aligned} 27y - (x - C)^3 &= 0, \\ 3(x - C)^2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Al eliminar C, obtenemos $y = 0$. Comprobando, nos convencemos de que $y = 0$ es la solución de la ecuación inicial. Es la solución singular (véase el ejemplo 1, § 1.9 y la observación para el ejemplo 3, § 1.2) y la envolvente de la familia de curvas $27y - (x - C)^3 = 0$.

Si se examina la integral general en la forma resuelta respecto a C: $C = x - 3y^{1/3}$, la función $\Psi(x, y) = x - 3y^{1/3}$ no es continuamente derivable en los puntos $y = 0$ los cuales, como nos hemos cerciorado anteriormente, son la envolvente de la familia de parábolas cúbicas.

§ 1.11. Ecuación diferencial de segundo orden

La ecuación

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

se llama *ecuación diferencial de segundo orden.*

Se supone que $F(u, v, w, g)$ es la función continuamente derivable dada de los puntos (u, v, w, g) de cierta región Ω del espacio cuadridimensional.

Toda función $y = y(x)$ que tenga en cierto intervalo la derivada continua de segundo orden y satisfaga la ecuación (1) se denomina *solución* de esta ecuación o *curva integral* de la misma.

En general, cada una de las soluciones $y = y(x)$ está definida en cierto intervalo propio $a < x < b$. Desde luego, para todo valor de x de este intervalo el punto

$$(x, y(x), y'(x), y''(x)) \in \Omega.$$

Frecuentemente se imponen condiciones adicionales sobre la solución que se busca. Representan un interés especial las condiciones

que garantizan la solución única de la ecuación. Por regla general, estas condiciones tienen la forma

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0' \tag{2}$$

y se llaman *condiciones iniciales*. El problema de encontrar una solución de la ecuación (1) que satisfaga las condiciones iniciales (2) se denomina *problema de Cauchy*. Desde el punto de vista geométrico las condiciones (2) significan que de la familia de curvas integrales que pasan por el punto (x_0, y_0) separamos una determinada curva integral que tenga la pendiente dada ($\operatorname{tg}\alpha = y'(x_0) = y_0'$, fig. 15).

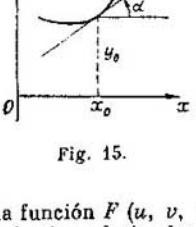

Fig. 15.

En la ecuación (1) pueden no entrar explícitamente todas las variables x, y, y', mas y'' sí debe entrar, de lo contrario no será una ecuación diferencial de segundo orden.

EJEMPLOS. $x^2 + y' + y'' = 0$, $y'y'' + 1 = 0$.

Resolvamos la ecuación (1) respecto a y''. Supongamos que esto sea posible. De la teoría de las funciones implícitas es sabido que si la función $F(u, v, w, g)$ es igual a cero en cierto punto (u_0, v_0, w_0, g_0), tiene derivadas parciales continuas en el entorno de este punto y la derivada parcial en el mismo $\frac{\partial F}{\partial g} \neq 0$, entonces la ecuación $F(u, v, w, g) = 0$ tendrá, en cierto entorno del punto indicado, una solución $g = f(u, v, w)$ que será única.

Entonces la ecuación (1) adquirirá la forma

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{3}$$

donde la función $f(u, v, w)$ está dada sobre cierta región ω del espacio tridimensional de los puntos (u, v, w), es continua sobre esta región y tiene las derivadas parciales continuas. La función f puede asimismo no depender explícitamente de algunas de las variables x, y, y'. Por ejemplo, esto tiene lugar para las ecuaciones $y'' = \varphi(x)$, $y'' = y' + y$, $y'' = y$, $y'' = y'$.

Supongamos que cierta curva integral $y = y(x)$ pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene en este punto la pendiente de la tangente igual al número dado y_0' (o sea, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$).

De este modo se determina unívocamente la segunda derivada de $y(x)$ en el punto x_0 la cual es igual a

$$y_0'' = f(x_0, y_0, y_0') \quad (y_0'' = y''(x_0)).$$

No obstante, surge la pregunta: si asignamos $x = x_0$ y los números arbitrarios y_0, y_0', entonces ¿existe o no, de hecho, la curva integral $y = y(x)$ de la ecuación (3) para la cual $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_0'$ y cuán grande es el número de estas curvas integrales? El teo-

rema que sigue a continuación muestra que si la función f es lo suficientemente suave en el entorno del punto (x_0, y_0, y_0'), tal curva integral existe y es única.

TEOREMA. *Supongamos que el segundo miembro de la ecuación* (3), *considerado como función de tres variables* (x, y, y') *dada sobre la región tridimensional* ω, *es continuo y tiene sobre esta región las derivadas parciales continuas* $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$.

Entonces, cualquiera que sea el punto $(x_0, y_0, y_0') \in \omega$, *existen el intervalo* (a, b) *y la función dos veces continuamente derivable* $y = y(x)$, *determinada sobre éste, la cual satisface la ecuación diferencial* (3).

La función que posee las propiedades indicadas es única.

Se dice que la función $y(x)$ es la *solución (curva integral)* de la ecuación diferencial (3), solución que satisface las *condiciones iniciales* (2). O bien se dice también que esta función resuelve el problema de Cauchy para las condiciones iniciales indicadas.

Es cómodo escribir cada una de estas soluciones en la forma

$$y(x) = y(x, y_0, y_0'),$$

donde y_0, y_0' son los parámetros de la solución. Estos parámetros son independientes: pueden tomarse tales como se quiera, con la única condición de que el punto $(x, y_0, y_0') \in \omega$.

Si se fija x_0, entonces a cada sistema de números $C_1 = y_0$, $C_2 = y_0'$, $(x_0, C_1, C_2) \in \omega$, le corresponderá la solución de la ecuación diferencial (3) que pueda escribirse (para x_0 fijo) en la forma

$$y = y(x, C_1, C_2),$$

donde C_1, C_2, o sea las constantes arbitrarias, son sus parámetros.

EJEMPLO. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' + y = 0$ que pasa por el punto (0, 1) y tiene en este punto la pendiente de la tangente $y'(0) = 0$.

Es fácil comprobar que la función $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$ es la solución de la ecuación dada para unas constantes C_1 y C_2 cualesquiera. Luego, $y(0) = C_1$, $y'(0) = C_2$. Para que se cumplan las condiciones iniciales es necesario poner $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Por lo tanto, la curva integral buscada tiene la forma: $y = \cos x$.

§ 1.12. Sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

Introduzcamos en la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \tag{1}$$

junto con su solución $y = y(x)$, $x \in (a, b)$, la función $z = z(x)$, poniendo $y' = z$. Entonces esta ecuación será equivalente al siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= f(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

respecto a dos funciones incógnitas y y z.

En efecto, supongamos que $y(x)$, $x \in (a, b)$ es la solución de la ecuación diferencial (1). Esta solución tiene la segunda derivada continua en (a, b). Entonces $z(x) = y'(x)$ tiene la primera derivada continua en (a, b).

Ahora bien, las funciones $y(x)$ y $z(x)$ tienen una derivada continua y satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales (2).

Y al revés, si las funciones $y(x)$, $z(x)$, $x \in (a, b)$ tienen las derivadas continuas en (a, b) y satisfacen el sistema (2), entonces de la primera ecuación del sistema (2) se deduce que $y(x)$ tiene la segunda derivada continua en (a, b) y, sustituyendo z de la primera ecuación en la segunda, obtenemos que $y(x)$ es la solución de la ecuación diferencial (1).

El sistema (2) es un caso particular del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \psi(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

respecto a las funciones incógnitas y y z.

Este último es, evidentemente, un caso particular del sistema

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, y', z') &= 0, \\ \Phi(x, y, z, y', z') &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

donde supondremos que las funciones F y Φ sean continuas y tengan las derivadas parciales continuas respecto a y, y', z, z' en cierta región de los puntos x, y, z, y', z'.

El par de funciones $y(x)$, $z(x)$ se llama *solución del sistema de ecuaciones diferenciales* (4) si estas funciones están definidas en cierto intervalo (a, b), dependiente de estas funciones, tienen derivadas parciales y satisfacen en (a, b) el sistema (4).

Si resolvemos las ecuaciones (4) respecto a y' y z', obtendremos un sistema que tenga la forma (3) (desde luego, suponemos que la solución del sistema (4) respecto a y' y z' es posible lo cual, como es sabido, está vinculado generalmente con el hecho de que el jacobiano $\frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')}$ no sea igual a cero).

Las ecuaciones (3) (ó (4)) forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden respecto a dos funciones incógnitas y y z.

El sistema (3), resuelto respecto a $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, se llama *normal*.

Para el sistema normal (3) es válido el siguiente teorema de existencia.

TEOREMA 1. *Supongamos que las funciones* $\varphi(x, y, z)$ y $\psi(x, y, z)$ *son continuas y tienen unas derivadas parciales continuas respecto a* y *y* z *sobre la región* ω *de los puntos* (x, y, z) *y supongamos que se da un punto arbitrario* $(x_0, y_0, z_0) \in \omega$.

Entonces existen un intervalo (a, b) *y unas funciones continuamente derivables* $y = y(x)$, $z = z(x)$, *definidas sobre éste, que satisfacen el sistema* (3) *y las condiciones iniciales*

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \tag{5}$$

Las funciones indicadas $y = y(x)$, $z = z(x)$ *son únicas.*

En este caso, si las funciones φ *y* ψ *tienen derivadas parciales continuas de orden* p, *entonces las soluciones* $y(x)$ *y* $z(x)$ *son continuamente derivables* $p + 1$ *veces en el intervalo indicado* (a, b).

Anteriormente hemos mostrado que la solución de la ecuación (1) de segundo orden respecto a una función puede ser reducida a la solución de dos ecuaciones de primer orden respecto a dos funciones incógnitas (el sistema (2)).

El sistema general de ecuaciones diferenciales de primer orden que tiene la forma (3) se reduce asimismo a la solución de una ecuación diferencial de segundo orden. En efecto, sustituyendo en el sistema (3) en vez de y y z cierta solución $y = y(x)$, $z = z(x)$ del mismo y derivando la primera ecuación respecto a x obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \psi \equiv \Phi(x, y, z). \tag{6}$$

Junto con (6) examinaremos la primera ecuación (3)

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z) \tag{7}$$

en la cual se han sustituido $y = y(x)$ y $z = z(x)$.

Hallemos z de (7) ($z = \chi(x, y, y')$) y sustituyámosla en (6), obteniendo de esta manera la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x, y, \chi(x, y, y')) \equiv \Lambda(x, y, y') \tag{8}$$

respecto a la función examinada $y = y(x)$.

Hemos obtenido que si $y(x)$ y $z(x)$ son las soluciones del sistema (3), entonces $y(x)$ es la solución de la ecuación de segundo orden.

Desde luego, para poder realizar estos cálculos se han necesitado nuevas propiedades de las funciones φ y ψ: la derivabilidad continua de φ respecto a x, y, z y la posibilidad de resolver la primera ecuación (3) respecto a z.

§ 1.13. Ecuación diferencial de n-ésimo orden

La ecuación

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

se llama *ecuación diferencial de n-ésimo orden.*

Aquí $F(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$ es una función, continua junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial v_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial v_n}$ sobre cierta región Ω de los puntos $(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$ del espacio de $(n+2)$ dimensiones.

Resolviendo la ecuación (1) respecto a $y^{(n)}$, obtenemos

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Es válido el teorema siguiente.

TEOREMA 1 (DE EXISTENCIA). *Supongamos que el segundo miembro* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *de la ecuación* (2), *examinado como función de* $n+1$ *variables, es continuo y tiene en cierto entorno* Ω *del punto* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ *las derivadas parciales continuas* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$.

Entonces existen un intervalo (a, b) *y una función* $y = y(x)$ *n veces continuamente derivable, definida en éste, que satisface la ecuación* (2) *y las condiciones iniciales*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{3}$$

La función $y = y(x)$ *que posee las propiedades indicadas es la única.*

Ahora bien, $y(x)$ *es la solución de la ecuación* (2), *solución que satisface las condiciones iniciales* (3).

Si se fija x_0, entonces a cada sistema de números

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = y_0', \ \ldots, \ C_n = y_0^{(n-1)}$$

que poseen la propiedad

$$(x_0, C_1, \ldots, C_n) \in \Omega$$

le corresponderá la solución de nuestra ecuación diferencial la cual (¡para x_0 fijo!) se puede escribir en la forma

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n). \tag{4}$$

Como resultado obtenemos una familia de soluciones de nuestra ecuación diferencial que dependen de n parámetros $C_1, \ldots, C_n$. A cada sistema determinado $(C_1, \ldots, C_n)$ de parámetros $((x_0, C_1, \ldots, C_n) \in \Omega)$ le corresponde su propia solución de la ecuación diferencial (con su propio intervalo de definición).

En la ecuación (2) se puede introducir nuevas funciones

$$y_1(x) = y, \quad y_2(x) = y', \ \ldots, \ y_n(x) = y^{(n-1)}.$$

En cualquier caso todas ellas tienen la primera derivada continua. Entonces la ecuación (2) resulta equivalente al siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ &\frac{dy_2}{dx} = y_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ &\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

El sistema (5) es un caso particular del sistema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{dy_n}{dx} = \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &((x, y_1, \ldots, y_n) \in \Omega) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

de n ecuaciones diferenciales de primer orden respecto a n funciones incógnitas $y_1, \ldots, y_n$.

Este es un *sistema normal (resuelto respecto a las derivadas* $\frac{dy_j}{dx}$ $(j = 1, \ldots, n)$). Es un caso particular del sistema

$$F_j(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Es válido el teorema.

TEOREMA 2 (DE EXISTENCIA). *Supongamos que las funciones* $\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *son continuas, tienen las derivadas parciales continuas de primer orden respecto a todas las variables, comenzando con la segunda, en cierta región* Ω *de los puntos* $(x, y_1, \ldots, y_n)$ *y supongamos también que está dado un punto determinado* $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ *de esta región.*

Entonces existen un intervalo (a, b) *y las funciones derivables continuamente* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, *definidas en éste, que satisfacen el sistema* (6) *y las condiciones iniciales*

$$y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{8}$$

Si las funciones $\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ *sobre la región* Ω *son* p *veces continuamente derivables, entonces respectivamente las soluciones del sistema* $y_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *poseen las mejores propiedades: tienen la derivada continua de orden* $p + 1$.

Si se fija x_0, a cada sistema de números

$$C_1 = y_{10}, \ldots, C_n = y_{n0} \quad (x_0, C_1, \ldots, C_n) \in \Omega$$

le corresponde la solución del sistema (6) la cual puede escribirse (para x_0 fijo!) en la forma

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{9}$$

donde $C_1, \ldots, C_n$, o sea las constantes arbitrarias, son los parámetros.

Anteriormente hemos señalado que la solución de la ecuación de n-ésimo orden se puede reducir a la solución de un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden con n incógnitas. Es justa asimismo la afirmación inversa: la *solución del sistema* (6), *para determinadas condiciones, puede ser reducida a la solución de cierta ecuación diferencial de n-ésimo orden con una función incógnita.*

La demostración de esta afirmación inversa representa el desarrollo de la afirmación respectiva en el caso de $n = 2$ (véase el § 1.12).

EJEMPLO. Reducir el sistema

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 + y_2 + y_3,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2 - 2y_3,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = y_1 + y_3$$

a una ecuación diferencial de tercer orden.

Reduciremos nuestro sistema a la ecuación diferencial respecto a la función $y_1(t)$. Derivando la primera ecuación del sistema, teniendo en cuenta las otras dos, tenemos

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + \frac{dy_3}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + y_1 + y_2 - y_3.$$

Derivando una vez más, se obtiene

$$\frac{d^3y_1}{dt^3} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_3}{dt} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt} - y_1 + y_2 - 3y_3. \tag{10}$$

A base del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= \frac{dy_1}{dt} + y_1 + y_2 - y_3 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

expresamos y_2 e y_3 mediante y_1 e y_1', y_1'':

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{2}(y_1'' - 2y_1), \\ y_3 &= \frac{1}{2}(-y_1'' + 2y_1'). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Sustituyendo estos valores de y_2 e y_3 en (10), se obtiene la ecuación buscada de tercer orden respecto a la función $y_1(t)$:

$$y_1''' - 3y_1'' + 2y_1' + 2y_1 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, encontramos la función y_1, luego con ayuda de las fórmulas (12) hallamos las funciones y_2 e y_3.

§ 1.14. Reducción del orden de una ecuación diferencial

En muchos casos se logra reducir la ecuación diferencial de n-ésimo orden

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

a una ecuación diferencial de orden más bajo introduciendo una nueva función incógnita. Examinemos algunos tipos de ecuaciones que permiten reducir el orden.

I. Supongamos que el primer miembro de la ecuación (1) no contiene explícitamente la función buscada y, o sea, la ecuación tiene la forma

$$F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2}$$

Introduzcamos la nueva función $z(x) = y'(x)$, entonces $z' = y'', \ldots, z^{(n-1)} = y^{(n)}$ y la ecuación (2) se escribirá de la siguiente manera:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0, \tag{3}$$

o sea, respecto a la función $z(x)$ ésta representa una ecuación del orden $(n-1)$.

Conviene sustituir una solución cualquiera $z(x)$, $a < x < b$, de esta ecuación en la ecuación diferencial $y' = z(x)$ y resolver esta última respecto a y:

$$y = \int z(x)\,dx + C.$$

Ha aparecido una constante arbitraria. Con frecuencia algunas soluciones de la ecuación diferencial (3), pero no obligatoriamente todas, forman la familia de funciones

$$z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1}), \quad a < x < b,$$

que dependen de $n - 1$ parámetros $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Le corresponde la familia de soluciones y de la ecuación diferencial (2)

$$y = \int \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})\,dx + C_n$$

que dependen de n parámetros $C_1, \ldots, C_n$ ($C_n = C$).

EJEMPLO 1. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$.

Aquí la función $y(x)$ no entra explícitamente en la ecuación. Poniendo $z = y'$, encontramos $z' = y''$ y nuestra ecuación toma la forma $z' = \sqrt{1 + z^2}$. Separando las variables, tenemos

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx, \quad x + C_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right),$$

o sea,

$$z + \sqrt{1+z^2} = e^{x+C_1}, \quad 1 + z^2 = e^{2(x+C_1)} - 2ze^{x+C_1} + z^2,$$

$$z = \frac{1}{2}\left(e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}\right) = \operatorname{sh}(x + C_1).$$

Pero $z = y'$, de donde $dy = \operatorname{sh}(x + C_1)\,dx$, $y = \operatorname{ch}(x + C_1) + C_2$.

II. Supongamos que el primer miembro de la ecuación (1) no contiene explícitamente la variable independiente x:

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{4}$$

En esta ecuación consideremos y como variable independiente e y', como función buscada. Designemos $y' = z(y)$. Entonces

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz'_y)}{dx} = \frac{d(z\cdot z'_y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\left(z'^2_y + z\cdot z''_y\right),$$

. . . . . .

$$y^{(n)} = \omega\left(z, z'_y, \ldots, z^{(n-1)}_y\right).$$

Sustituyendo estos valores en (4), obtenemos la ecuación diferencial de orden $(n-1)$ respecto a z. Supongamos que $z = z(y)$, $\alpha < y < \beta$, es la solución de esta ecuación diferencial, solución que se distingue de cero en (α, β). Puesto que $z(y) = \frac{dy}{dx}$, entonces

$$dx = \frac{dy}{z(y)}, \quad x = \int \frac{dy}{z(y)} + C, \quad \alpha < y < \beta.$$

Hemos obtenido la solución $y(x)$ de la ecuación inicial (4) en la forma implícita. Además, esta solución depende de la constante arbitraria C.

Sin embargo, con frecuencia las funciones $z = z(y)$ se obtienen en forma de familias de funciones

$$z = z(y, C_1, \ldots, C_{n-1}), \quad \alpha < y < \beta,$$

que dependen de $n-1$ parámetros $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Las soluciones $y(x)$ que les corresponden forman, a su vez, la familia

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n)$$

de funciones que dependen de n parámetros $C_1, \ldots, C_n$ ($C_n = C$).

EJEMPLO 2. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

Aquí x no está presente explícitamente, por eso ponemos $y'_x = z(y)$, $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = z \cdot z'_y$. Sustituyendo estos valores en la ecuación, tenemos $z^2 + 2yzz'_y = 0$ o bien $z(z + 2yz'_y) = 0$. De aquí $z = 0$ y $z + 2yz'_y = 0$.

Si $z = 0$, entonces $\frac{dy}{dx} = 0$, $y = \text{const}$.

Si $z + 2yz'_y = 0$, entonces, dividiendo las variables, obtenemos

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y}, \quad \ln\left|\frac{z}{C_1}\right| = \ln\frac{1}{\sqrt{y}}, \quad z = \frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \quad \sqrt{y}\,dy = C_1\,dx, \quad \frac{2}{3}y^{3/2} = C_1 x + C_2.$$

III. El primer miembro de la ecuación (1) es una función homogénea de grado m respecto a las variables $y, y', \ldots, y^{(n)}$, o sea,

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \quad (t > 0).$$

Para reducir el orden, introducimos una nueva función $z(x)$ con ayuda de la fórmula

$$y' = y \cdot z \quad (y \not\equiv 0).$$

Entonces

$$y'' = (yz)' = y'z + y \cdot z' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z'),$$

. . . . . .

$$y^{(n)} = y\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)}).$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1), obtenemos

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \ldots, y\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0$$

o en virtud de la homogeneidad de la función

$$y^m F(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Puesto que $y \not\equiv 0$, obtenemos la ecuación diferencial de orden $(n-1)$

$$F(x, 1, z, \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Supongamos que $z = z(x)$ es la solución de esta ecuación. Como $z(x) = y'/y$, entonces

$$\frac{dy}{y} = z(x)\,dx, \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = \int z(x)\,dx,$$

$$y = C\exp\left(\int z(x)\,dx\right),$$

donde C es la constante arbitraria. Y si resulta que

$$z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1}),$$

entonces

$$y = C_n \exp\left(\int \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})\,dx\right),$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 3. Vamos a resolver con ayuda de este método la ecuación del ejemplo precedente.

La función $F(x, y, y', y'') = y'^2 + 2yy''$ es homogénea de segundo grado respecto a y, y', y''. La función $y(x) \equiv 0$ es la solución de la ecuación. Supongamos que $y \not\equiv 0$. Poniendo $y' = z \cdot y$, tenemos $y'' = y(z' + z^2)$. Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos

$$(yz)^2 + 2y^2(z' + z^2) = 0 \quad (y \not\equiv 0).$$

De aquí $3z^2 + 2z' = 0$. La función $z \equiv 0$ es la solución de la ecuación dada (entonces $y' = 0$, $y = C$ es la solución de la ecuación inicial). Sea $z \not\equiv 0$, entonces

$$-\frac{2dz}{3z^2} = dx, \quad \frac{2}{3}z^{-1} = x + C_1, \quad z = \frac{2}{3}(x + C_1)^{-1};$$

$$\frac{dy}{y} = z\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{dx}{x + C_1},$$

$$\ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = \frac{2}{3}\ln|x + C_1|, \quad y = C_2(x + C_1)^{2/3}$$

es la solución general. Señalemos que la solución $y \equiv 0$ se obtiene de la general para $C_2 = 0$.

§ 1.15. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Se llama *ecuación diferencial lineal* de *n-ésimo orden* la ecuación que tiene la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = f(x), \quad (1)$$

$$a < x < b,$$

donde $f(x)$, $p_0(x)$, . . ., $p_{n-1}(x)$ son las funciones dadas que son continuas en el intervalo (a, b). Designemos el primer miembro de la ecuación (1) por $L_n[y] \equiv L[y]$. Este se llama *operador diferencial lineal de n-ésimo orden.*

El operador $L(y)$ posee las propiedades siguientes:

1) $L[C_y] = CL[y]$, o sea, la homogeneidad del operador;

2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, o sea, la aditividad del operador.

Señalemos que el operador homogéneo y aditivo se denomina *lineal.*

Sobre la base de estas propiedades obtenemos fácilmente que

$$L\left[\sum_{k=1}^{m} C_k y_k\right] = \sum_{k=1}^{m} C_k L[y_k], \quad (2)$$

donde C_k son las constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1. Sea $L[y] = y'' + y$.

Es fácil ver que $L[\operatorname{sen} x] = -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0$, $L[x^2] = 2 + x^2$.

La ecuación (1) se puede escribir en la forma

$$L[y] \equiv L_n[y] = f(x), \quad a < x < b. \quad (1')$$

Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación

$$L_n[y] = 0, \quad a < x < b, \quad (3)$$

se llama *ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden.* Teniendo esto en cuenta, la ecuación (1) se denomina *no homogénea.*

Consideramos que las funciones $f(x)$, $p_0(x)$, . . ., $p_{n-1}(x)$ son continuas en el intervalo (a, b). Se puede demostrar que para tales funciones la *ecuación diferencial* (1) *tiene la única solución, definida en el mismo* (!) *intervalo* (a, b), *que satisfaga las condiciones iniciales*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Además, si las funciones $p_j(x)$ *y* $f(x)$ *tienen en* (a, b) *unas derivadas continuas de orden* q, *entonces la solución indicada* $y(x)$ *tiene en* (a, b) *unas derivadas continuas hasta el orden* $n + q$, *inclusivamente.*

TEOREMA 1. *Si* $y_1, \ldots, y_m$ *son las soluciones de la ecuación homogénea* (3), *su combinación lineal* $\sum_{k=1}^{m} C_k y_k$ *asimismo es la solución de la ecuación* (3).

Esto se deriva de la ecuación (2).

Introduzcamos el concepto de dependencia lineal de las funciones por analogía con el concepto respectivo para un sistema de vectores.

Las funciones $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ se llaman *dependientes linealmente* en (a, b) si una de ellas es la combinación lineal de otras $\forall x \in (a, b)$. En otras palabras, las funciones $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ se denominan linealmente dependientes en (a, b) si existen los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de los cuales al menos uno no es igual a cero, tales que

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) \equiv 0, \quad a < x < b. \tag{4}$$

Si la identidad (4) no se cumple sino en el caso cuando todos los $\alpha_i = 0$, las funciones $y_1, \ldots, y_m$ se llaman *linealmente independientes* en (a, b).

El sistema de n ecuaciones linealmente independientes, en el intervalo (a, b)

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

de la ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden (3) con los coeficientes $p_j(x)$ continuos en (a, b) se denomina *sistema fundamental de soluciones* de esta ecuación.

Para resolver la ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden (3) con los coeficientes continuos $p_j(x)$ es necesario hallar su sistema fundamental de soluciones.

Conforme al teorema 1 una *combinación lineal arbitraria de las soluciones* $y_j(x)$, *o sea, la suma*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x), \tag{5}$$

donde C_k *son números arbitrarios, es a su vez la solución de la ecuación* (3) *en* (a, b). Sin embargo, resulta justa también la afirmación inversa, o sea, toda solución de la ecuación diferencial (3) en el intervalo (a, b) representa cierta combinación lineal de sus soluciones particulares indicados $y_j(x)$, independientes entre sí, (véase a continuación el teorema 4) que forman el sistema fundamental de soluciones.

Ahora bien, la *solución general de la ecuación diferencial homogénea* (3) *tiene la forma de* (5), *donde* C_k *son las constantes arbitrarias e* $y_k(x)$ *son las soluciones particulares* (3) *que forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.*

Notemos que la solución general de la ecuación no homogénea (1) es la suma de una de sus soluciones particulares $y_0(x)$ y de la solución general de la ecuación homogénea

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x). \tag{6}$$

En efecto,

$$L_n[y] = L_n[y_0] + \sum_{j=1}^{n} C_j L[y_j] = f(x) + 0 = f(x).$$

Por otro lado, si y es una solución arbitraria de la ecuación (1), entonces

$$L_n[y - y_0] = L_n[y] - L_n[y_0] = f(x) - f(x) = 0$$

y, por consiguiente, $y - y_0$ es la solución de la ecuación homogénea; pero entonces existen tales números C_j para los cuales

$$y(x) - y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x),$$

o sea, para estos números se cumple la igualdad (6).

TEOREMA 2. *Si las funciones* $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ *son linealmente dependientes en* (a, b) *y tienen las derivadas hasta el orden* $(m-1)$, *entonces el determinante*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_m'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \ldots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (\forall\, x \in (a, b)). \tag{7}$$

El determinante (7) se llama *determinante de Wronski* [1] o *wronskiano* y se designa por el símbolo $W(x) \equiv W[y_1, \ldots, y_m]$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que las funciones $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ son linealmente dependientes en (a, b), existen tales números $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, no todos iguales a cero, para los cuales se cumple la identidad (4) en (a, b). Derivándola $m-1$ veces, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) \equiv 0, \\ &\alpha_1 y_1'(x) + \ldots + \alpha_m y_m'(x) \equiv 0, \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &\alpha_1 y_1^{(m-1)}(x) + \ldots + \alpha_m y_m^{(m-1)}(x) \equiv 0. \end{aligned}$$

[1] J. Wronski-Hoene (1778—1853), matemático polaco.

Este sistema homogéneo tiene según la condición una solución no trivial $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (o sea, al menos un $\alpha_i \neq 0$) cuando $\forall\, x \in (a, b)$. Esto último es posible cuando el determinante del sistema, que es el determinante de Wronski $W(x)$, es idénticamente igual a cero. El teorema queda demostrado.

Observación 1. Del teorema 2 se deduce que si $W(x) \not\equiv 0$ al menos en un solo punto de (a, b), las funciones $y_1, \ldots, y_m$ son linealmente independientes en (a, b).

EJEMPLO 2. Las funciones $1, x, \ldots, x^{m-1}$ son linealmente independientes en cualquier intervalo (a, b), ya que

$$W[1, x, \ldots, x^{m-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{m-1} \\ 0 & 1! & 2x & \ldots & (m-1)\,x^{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1! \, 2! \ldots (m-1)! \not\equiv 0.$$

EJEMPLO 3. Las funciones $e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_m x}$ son linealmente independientes en un intervalo cualquiera (a, b), si $k_1, \ldots, k_m$ son números diferentes.

En efecto

$$W[e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_m x}] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & \ldots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & \ldots & k_m e^{k_m x} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{m-1} e^{k_1 x} & \ldots & k_m^{m-1} e^{k_m x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1 + \ldots + k_m)x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & \ldots & k_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{m-1} & \ldots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} \not\equiv 0,$$

puesto que el último determinante es el determinante de Vandermonde [1] el cual para diferentes $k_1, \ldots, k_m$ no es igual a cero.

EJEMPLO 4. Las funciones $e^{kx}, xe^{kx}, \ldots, x^{m-1} e^{kx}$ son linealmente independientes en un intervalo (a, b) cualquiera.

Como $e^{kx} \not\equiv 0$ y

$$\alpha_1 e^{kx} + \alpha_2 x e^{kx} + \ldots + \alpha_m x^{m-1} e^{kx} = e^{kx} [\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_m x^{m-1}],$$

la independencia lineal de las funciones indicadas se deduce del segundo ejemplo.

TEOREMA 3. *Para que las soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ de la ecuación diferencial homogénea lineal $L_n[y] = 0$ con los coeficientes continuos*

[1] Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 2.

sean linealmente independientes en un intervalo (a, b), *es necesario y suficiente que* $W[y_1, \ldots, y_n] \not\equiv 0$ *para todos los valores de* $x \in (a, b)$.

DEMOSTRACIÓN. 1) Si $W(x) \not\equiv 0$ en (a, b), entonces las funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ son linealmente independientes sin importar el hecho de que sean o no las soluciones de la ecuación $L_n[y] = 0$ (véase la observación 1).

2) Supongamos que $y_1, \ldots, y_n$ son las funciones linealmente independientes en (a, b) y son las soluciones de la ecuación $L_n[y] = 0$.

Vamos a demostrar que $W(x) \not\equiv 0$ en todos los puntos de (a, b). Admitamos lo contrario, es decir, admitamos que existe el punto $x = x_0 \in [a, b]$ en el cual $W(x_0) = 0$. Escojamos los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, simultáneamente desiguales a cero, de modo que sean las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) &= 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Esto se puede hacer, ya que el determinante del sistema (8) es $W(x_0) = 0$. Entonces, en virtud del teorema 1, la función $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$ será la solución de la ecuación $L_n[y] = 0$ con condiciones iniciales nulas

$$y(x_0) = 0, \; y'(x_0) = 0, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ (según (8))}.$$

Sin embargo, las mismas condiciones las satisface también la solución trivial $y \equiv 0$. En virtud del teorema de existencia y de unicidad, la solución que satisfaga estas n condiciones iniciales puede ser una sola y, por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) \equiv 0$ en (a, b), o sea, las funciones $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes en (a, b) lo que no hemos supuesto. El teorema queda demostrado.

Si $p_i(x)$ son las funciones discontinuas en el intervalo donde buscamos la solución, entonces la ecuación $L_n[y] = 0$ puede tener no una sola solución que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ y entonces es posible que $W(x) \equiv 0$ en (a, b).

EJEMPLO 5. Es fácil comprobar que las funciones

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^\alpha, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leqslant 1, \\ (x-1)^\alpha, & 1 < x < 2 \end{cases} \quad (\alpha > 2)$$

son linealmente independientes en (0, 2) y para ellas $W(x) \equiv 0$ en (0, 2).

Esto está ligado al hecho de que la función $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es la solución general de la ecuación

$$y'' - \frac{\alpha(\alpha-1)}{(x-1)^2}\, y = 0,$$

donde $p_0(x) = -\frac{\alpha(\alpha-1)}{(x-1)^2}$ es discontinua en el punto $x = 1$. Para esta ecuación el teorema de existencia y de unicidad no tiene lugar (en el entorno del punto $x = 1$). No solamente la función $y \equiv 0$ sino también la función $y_1(x)$ es la solución de la ecuación diferencial, tal que satisface las condiciones iniciales $y = 0$ e $y' = 0$ cuando $x = 1$.

TEOREMA 4 (ESTRUCTURA DE LA SOLUCIÓN GENERAL). *Si $y_1, \ldots, y_n$ son las soluciones linealmente independientes en el intervalo (a, b), de la ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden $L_n[y] = 0$ con los coeficientes continuos $p_i(x)$, $a < x < b$, entonces la función*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x), \quad a < x < b. \tag{9}$$

donde C_k son las constantes arbitrarias, es la solución general de la ecuación $L_n[y] = 0$, o sea, la suma (9), cualesquiera que sean C_k, es la solución de esta ecuación y, viceversa, toda solución de esta ecuación se puede representar en forma de la suma (9) para los valores correspondientes de C_k.

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que la suma (9), cualesquiera que sean C_k, es la solución de la ecuación $L_n[y] = 0$. Supongamos lo inverso que $z = z(x)$ es una solución arbitraria de esta ecuación. Pongamos

$$z(x_0) = z_0, \quad z'(x_0) = z_0', \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(x_0) = z_0^{(n-1)}. \tag{10}$$

Para los números obtenidos $z_0, z_0', \ldots, z_0^{(n-1)}$ planteemos un sistema lineal de ecuaciones respecto a los números incógnitos C_k:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x_0) &= z_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)}(x_0) &= z_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

El determinante del sistema (11) $W(x_0)$ no es igual a cero, ya que las funciones $y_1, \ldots, y_n$ son las soluciones linealmente independientes, en (a, b), de la ecuación $L_n[y] = 0$. Por eso existe un único sistema de números $C_1^0, \ldots, C_n^0$ que satisfacen las ecuaciones (11).

Sustituyéndolos en (9), obtenemos la solución de nuestra ecuación en la forma

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 y_k(x),$$

solución que satisface las mismas condiciones iniciales (10) las cuales satisface $z(x)$. Pero entonces, sobre la base del teorema de existencia y de unicidad tiene lugar la igualdad $z(x) = y(x)$, $x \in (a, b)$. El teorema queda demostrado.

Ahora bien, para encontrar la solución general de la ecuación homogénea $L_n[y] = 0$, es suficiente hallar cualesquiera n soluciones linealmente independientes de esta ecuación y entonces la solución general será su combinación lineal (9). Recordemos que hemos convenido en llamar a todo conjunto de n soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación $L_n[y] = 0$ *sistema fundamental de soluciones* de esta ecuación.

Surge la pregunta: ¿Existe o no en todos los casos un sistema fundamental de soluciones para la ecuación diferencial homogénea dada (3) con coeficientes continuos? Mostremos que existe en todos los casos.

Demos n vectores

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= (1, 0, \ldots, 0), \\ a^{(2)} &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{(n)} &= (0, 0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

A cada uno de estos vectores le haremos corresponder la solución $y_k(x)$ de la ecuación (3). Supongamos que precisamente $y_k(x)$ es la solución que satisface las condiciones iniciales

$$\begin{gathered} y_k(x_0) = 0,\ y_k'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_k^{(k-2)}(x_0) = 0, \\ y_k^{(k-1)}(x_0) = 1,\ y_k^{(k)}(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_k^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered}$$

El determinante de Wronski $W(x)$ para este sistema de soluciones cuando $x = x_0$ $(a \leqslant x_0 \leqslant b)$ es, evidentemente, el determinante de la matriz compuesta de los vectores $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$. Es igual a 1:

$$W(x_0) = 1 \neq 0.$$

Pero entonces el sistema de soluciones $y_1, \ldots, y_n$ es linealmente independiente, porque para un sistema dependiente el determinante de Wronski sería idénticamente igual a cero.

§ 1.16. Ecuaciones homogéneas lineales de n-ésimo orden con coeficientes constantes

La ecuación

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1y' + p_0y = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

donde p_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ son los números constantes se llama *ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes.*

Para resolver la ecuación (1) es necesario hallar cualquier sistema fundamental suyo de soluciones, o sea, hallar cualesquiera n soluciones particulares suyas $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ que forman un sistema linealmente independiente sobre todo el eje y entonces (véase § 1.15) la solución general de la ecuación (1) tendrá el aspecto

$$y = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x),$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son los números constantes arbitrarios.

Busquemos las soluciones particulares de la ecuación (1) en la forma $y = e^{kx}$, donde k es un número constante. Entonces

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2e^{kx}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = k^ne^{kx}.$$

Sustituyendo estos valores de las derivadas en (1), obtenemos

$$L_n[e^{kx}] = e^{kx}[k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1k + p_0] = 0.$$

Como $e^{kx} \neq 0$, entonces

$$R_n(k) \equiv k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1k + p_0 = 0. \tag{2}$$

Ahora bien, si k es la raíz de la ecuación algebraica (2), la función $y = e^{kx}$ es la solución de la ecuación (1) y al revés. La ecuación (2) se dice *característica* para la ecuación (1). Esta puede obtenerse de (1) si las derivadas $y^{(j)}$ se sustituyen, respectivamente, por los números k^j $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Y viceversa, por la ecuación (2) es fácil reconstruir la ecuación (1). Como es sabido, la ecuación (2) tiene n raíces, tomando en cuenta la multiplicidad.

1°. Supongamos que las raíces de la ecuación (2) $k_1, \ldots, k_n$ son diferentes. Entonces n funciones

$$e^{k_1x}, \quad e^{k_2x}, \quad \ldots, \quad e^{k_nx} \tag{3}$$

son las soluciones de la ecuación (1) y, además, son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ (véase el ejemplo 3, § 1.15), o sea, forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1).

Por eso en este caso (véase § 1.15, teorema 4) la solución general de la ecuación (1) se escribirá en la forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{k_j x}, \qquad (4)$$

donde C_j son las constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1. A la ecuación $y'' - 5y' + 6y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^2 - 5k + 6 = 0$ con las raíces reales simples $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. La solución general es $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

EJEMPLO 2. A la ecuación $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$ o bien $(k - 2)(k^2 - 1) = 0$. Las raíces son simples: $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$. A éstas les corresponde la solución general de la ecuación $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$.

Si los números p_i son reales y una raíz cualquiera k_j es compleja ($k_j = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$), entonces entre las demás raíces debe existir una raíz conjugada ($k_s = \alpha - i\beta$, $s \neq j$). Puesto que las funciones complejas $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{(\alpha-i\beta)x}$ son las soluciones de la ecuación (1), entonces (véase el teorema 1, § 1.15) la función

$$\frac{1}{2}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}\right] = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad (5)$$

al igual que la función

$$\frac{1}{2i}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right] = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \qquad (6)$$

es, a su vez, la solución de la ecuación (1). Aquí hemos utilizado las fórmulas de Euler $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$.

Las soluciones (5) y (6) son funciones reales y en esto consiste su ventaja ante las funciones $\exp(k_j x)$ y $\exp(k_s x)$; ésta es la razón por la que ellas sustituyen frecuentemente en el sistema (3) estas últimas funciones.

Se puede demostrar que el sistema modificado (3) es linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 3. A la ecuación $y'' + y = 0$ le corresponden la ecuación característica $k^2 + 1 = 0$ y las raíces complejas $k_1 = i$, $k_2 = -i$ conjugadas entre sí. En forma exponencia la solución tiene la forma

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}.$$

Utilizando las fórmulas de Euler, la solución general se puede escribir:

$$y = C_1(\cos x + i \operatorname{sen} x) + C_2(\cos x - i \operatorname{sen} x) =$$
$$= (C_1 + C_2)\cos x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen} x = A\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

Aquí A y B son las constantes arbitrarias, porque las ecuaciones $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$ pueden ser resueltas respecto a C_1 y C_2 para A y B cualesquiera.

EJEMPLO 4. A la ecuación $y'' + y' + y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^2 + k + 1 = 0$ con las raíces

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La solución general de la ecuación se escribirá así

$$y = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

2°. Si k_1 es la raíz del orden de multiplicidad m, entonces en el sistema (3) aparecen m funciones iguales

$$e^{k_1 x},\ e^{k_1 x},\ \ldots,\ e^{k_m x}\quad (k_1 = k_2 = \ldots = k_m) \tag{7}$$

y el sistema (3) deja de ser linealmente independiente. En este caso (cuando k_1 es una raíz múltiple) resulta (véase a continuación el lema 1) que las funciones

$$e^{k_1 x},\ xe^{k_1 x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{k_1 x} \tag{8}$$

también son las soluciones de la ecuación (1) que forman un sistema linealmente independiente en cualquier intervalo (a, b) (véase a continuación el lema 1). Por regla general, ellas sustituyen las funciones (7) en el sistema (3).

Si tal sustitución se lleva a cabo para todas las raíces múltiples, el nuevo sistema obtenido será, como puede demostrarse, linealmente independiente.

EJEMPLO 5. A la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^2 - 2k + 1 = 0$ que tiene una raíz de segundo orden de multiplicidad $k = 1$. Por eso la solución general de esta ecuación se escribe en la forma $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

EJEMPLO 6. A la ecuación $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0$ o bien $(k + 1)^3 = 0$, de donde $k = -1$ es la raíz de tercer orden de multiplicidad y, por consiguiente, la solución general tiene la forma $y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$.

Para p_l reales, si $k_1 = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de orden de multiplicidad m, entonces $k_1 = \alpha - i\beta$ es asimismo la raíz de orden de multiplicidad m a la cual le corresponden las soluciones

$$e^{\bar{k}_1 x},\ xe^{\bar{k}_1 x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\bar{k}_1 x} \tag{8'}$$

que surgen en la serie (3). Escribamos más detalladamente las soluciones (8) y (8')

$$e^{(\alpha+i\beta)x},\ xe^{(\alpha+i\beta)x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{(\alpha+i\beta)x},$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x},\ xe^{(\alpha-i\beta)x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Sumándolas, respectivamente, y dividiéndolas entre 2 o bien restándolas y dividiéndolas entre $2i$, obtenemos dos sistemas de soluciones reales de la ecuación (1)

$$\left.\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\\ &e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

las cuales sustituyen las funciones complejas (8) y (8') en la serie (3).

Queda por observar que se puede demostrar que si semejante sustitución se efectúa para todas las raíces múltiples de la ecuación característica, entonces las funciones del nuevo sistema forman un sistema linealmente independiente de soluciones de la ecuación (1) en cualquier intervalo (a, b).

EJEMPLO 7. A la ecuación diferencial $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ o bien $(k^2 + 1)^2 = 0$, de donde $k_1 = i$ y $k_2 = -i$ son las raíces de segundo orden de multiplicidad. Por eso la solución general de la ecuación diferencial tiene la forma

$$y = C_1\cos x + C_2x\cos x + C_3\operatorname{sen}x + C_4x\operatorname{sen}x.$$

LEMA 1. *Si k_1 es la raíz de la ecuación característica $R_n(k) = 0$ de orden de multiplicidad m, las funciones*

$$e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{k_1x}$$

son las soluciones de la ecuación diferencial (1) *linealmente independientes en cualquier intervalo* (a, b).

DEMOSTRACIÓN. La independencia lineal de las funciones indicadas queda establecida en el ejemplo 4 del § 1.15.

Puesto que k_1 es la raíz de orden de multiplicidad m del polinomio $R_n(k)$, entonces $R_n(k) = (k - k_1)^m\varphi(k)$, donde $\varphi(k)$ es un polinomio tal que $\varphi(k_1) \neq 0$. De aquí

$$R_n(k_1) = 0,\quad R_n'(k_1) = 0,\ \ldots,\ R_n^{(m-1)}(k_1) = 0. \qquad (10)$$

Tenemos

$$L_n[x^je^{kx}] = L_n\left[\frac{\partial^j}{\partial k^j}e^{kx}\right] = \frac{\partial^j}{\partial k^j}L_n[e^{kx}] =$$

$$= \frac{\partial^j}{\partial k^j}[e^{kx}R_n(k)] = \sum_{s=0}^{j} C_s\frac{\partial^{j-s}e^{kx}}{\partial k^{j-s}}\cdot\frac{d^sR_n(k)}{dk^s},$$

donde C_s son ciertos números constantes. De aquí, si $j \leqslant m-1$ y $k = k_1$, en virtud de (10), obtenemos

$$L_n [x^j e^{k_1 x}] = 0$$

y el lema queda demostrado.

Observación 1. De lo expuesto anteriormente se deduce que si k_j es la raíz de una ecuación característica cuyo orden de multiplicidad es l_j ($j = 1, \ldots, m$; $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$), entonces el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1) consta de las funciones

$$e^{k_j x},\ x e^{k_j x},\ \ldots,\ x^{l_j - 1} e^{k_j x} \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Si cierta raíz k_j es compleja $k_j = \alpha_j + i\beta_j$ ($\beta_j \neq 0$), entonces a ésta, junto con la raíz $\bar{k}_j$ le corresponde el grupo de funciones reales

$$e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x,\ \ldots,\ x^{l_j - 1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x,$$
$$e^{\alpha_j x} \operatorname{sen} \beta_j x,\ \ldots,\ x^{l_j - 1} e^{\alpha_j x} \operatorname{sen} \beta_j x.$$

EJEMPLO 8. La ecuación con coeficientes variables cuya forma es

$$x^n y^{(n)} + p_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_1 x y' + p_0 y = 0,$$

donde $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ son los números constantes, se llama *ecuación de Euler*.

Sustituyendo $x = e^t$ esta ecuación se reduce a la de coeficientes constantes. En efecto, tenemos

$$y(x) = y(e^t) = v(t),$$

de donde

$$y'(x) = v'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = v'(t) \cdot e^{-t},\quad x y'(x) = v'(t);$$

$$y''(x) = v''(t)\, e^{-2t} - v'(t)\, e^{-2t};\quad x^2 y''(x) = v''(t) - v'(t);\ \ldots$$

Sustituyendo estos valores, obtenemos una ecuación con coeficientes constantes respecto a la función $v(t)$. Las soluciones particulares de esta ecuación, como hemos mostrado anteriormente, son las funciones cuya forma es $e^{kt} = x^k$ o bien $t^j e^{kt} = x^k \ln^j x$, donde k es la raíz (simple o múltiple) de la ecuación característica respectiva. Ahora bien, las soluciones particulares de la ecuación de Euler se pueden hallar directamente en la forma x^k, $x^k \ln^j x$.

EJEMPLO 9. Resolvamos la ecuación concreta de Euler $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$. Busquemos las soluciones particulares en la forma $y = x^k$, entonces

$$y' = k x^{k-1},\quad y'' = k(k-1) x^{k-2}.$$

Sustituyendo estos valores de las derivadas, obtenemos

$$x^2k\,(k-1)\,x^{k-2} + 3kx\cdot x^{k-1} + x^k = x^k\,[k\,(k-1) + 3k + 1] = 0.$$

De aquí, si $x \neq 0$, entonces $k\,(k-1) + 3k + 1 = 0$. La última ecuación tiene la raíz $k = -1$ de segundo orden de multiplicidad. Por lo tanto, $y = 1/x$ es una solución de la ecuación de Euler. La otra solución es $y = (\ln x)/x$ de lo cual podemos convencernos directamente. Puesto que $1/x$ y $(\ln x)/x$ son linealmente independientes (su determinante de Wronski es igual a $1/x^3 \neq 0$),

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x}$$

es la solución general de la ecuación dada de Euler.

§ 1.17. Método de variación de las constantes

Examinemos la ecuación lineal no homogénea de n-ésimo orden

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0y = f(x), \tag{1}$$

donde los coeficientes $p_i = p_i(x)$ y el segundo miembro $f(x)$ está representado por las funciones continuas dadas en un intervalo (a, b).

Admitamos que conocemos el sistema fundamental de soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente

$$L_n[y] = 0. \tag{2}$$

Como hemos mostrado en el § 1.15 (fórmula (6)), la solución general de la ecuación (1) es igual a la suma de la solución general de la ecuación (2) y de una solución cualquiera de a ecuación (1).

La solución de la ecuación no homogénea (1) puede obtenerse por el *método de variación de las constantes* si se conoce la solución general de la ecuación homogénea (2). Aclaremos este método citando como ejemplo una ecuación de tercer orden.

Supongamos dada la ecuación lineal de tercer orden

$$y''' + p_2y'' + p_1y' + p_0y = f(x). \tag{3}$$

Supongamos, además, que la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x), \tag{4}$$

donde y_1, y_2, y_3 son las soluciones linealmente independientes de la ecuación (2), $(L[y_i] = 0,\ i = 1, 2, 3)$.

Busquemos la solución de la ecuación no homogénea (3) en forma de la suma de (4), donde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ son ciertas funciones

continuamente derivables que deben ser halladas. Impongamos sobre las funciones buscadas $C_i(x)$ dos condiciones

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} C_i'(x)\, y_i(x) = 0,\\ \sum_{i=1}^{3} C_i'(x)\, y_i'(x) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Entonces

$$y' = \sum_{i=1}^{3} C_i y_i' + \sum_{i=1}^{3} C_i' y_i = \sum_{i=1}^{3} C_i y_i',$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{3} C_i y_i'' + \sum_{i=1}^{3} C_i' y_i' = \sum_{i=1}^{3} C_i y_i'',$$

$$y''' = \sum_{i=1}^{3} C_i y_i''' + \sum_{i=1}^{3} C_i' y_i''.$$

Sustituyendo estas derivadas y la misma función y en (3), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{3} C_i y_i''' + \sum_{i=1}^{3} C_i' y_i'' + p_2 \sum_{i=1}^{3} C_i y_i'' + p_1 \sum_{i=1}^{3} C_i y_i' + p_0 \sum_{i=1}^{3} C_i y_i = f(x),$$

o bien,

$$C_1 (y_1''' + p_2 y_1'' + p_1 y_1' + p_0 y_1) + C_2 (y_2''' + p_2 y_2'' + p_1 y_2' + p_0 y_2) +$$

$$+ C_3 (y_3''' + p_2 y_3'' + p_1 y_3' + p_0 y_3) + \sum_{i=1}^{3} C_i' y_i'' = f(x).$$

Pero las expresiones entre paréntesis en el primer miembro de esta igualdad son iguales a cero, por eso

$$\sum_{i=1}^{3} C_i' y_i'' = f(x). \tag{6}$$

Hemos obtenido la ecuación (6) y dos ecuaciones (5) con los coeficientes y_i, y_i', y_i'' y con el segundo miembro $f(x)$ los cuales son continuos en el intervalo (a, b). Estas tres ecuaciones forman un sistema algebraico lineal respecto a las incógnitas C_1', C_2', C_3' con un determinante no igual a cero, por cuanto es el determinante de Wronski para el sistema fundamental de soluciones y_1, y_2, y_3. Por eso el sistema dado tiene una sola solución

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, 3),$$

donde φ_i son las funciones continuas en (a, b), de donde

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx. \tag{7}$$

En este caso las funciones $C_i(x)$ tienen en (a, b) una derivada continua. Por consiguiente, la solución particular de la ecuación no homogénea (1) tiene la forma

$$y(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x) + C_3(x)\,y_3(x),$$

donde las funciones $C_i(x)$ se definen por las igualdades (7).

EJEMPLO. $y''' - 3y' + 2y = e^{3x}$, $R_2(k) = k^2 - 3k + 2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ son las raíces de la ecuación característica; la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Hallemos la solución particular de la ecuación no homogénea por el método de variación de las constantes C_1 y C_2. Planteemos el sistema (5) y (6):

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\,e^{2x} &= 0,\\ C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\cdot 2\cdot e^{2x} &= e^{3x} \end{aligned}\right\} W[y_1y_2] = e^{3x} \neq 0.$$

Resolviendo el sistema, tenemos $C_1'(x) = -e^{2x}$, $C_2'(x) = e^x$, de donde $C_1(x) = -e^{2x}/2$, $C_2(x) = e^x$ y la solución particular

$$\bar{y} = -\frac{1}{2}\,e^{2x}\cdot e^x + e^x e^{2x} = \frac{1}{2}\,e^{3x}.$$

Ahora bien, la solución general de la ecuación inicial tiene la forma

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{3x}.$$

§ 1.18. Solución particular de una ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes

Examinemos la ecuación no homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0y = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

donde el segundo miembro tiene la forma especial $f(x) = e^{k_0x}$ o una forma más general $f(x) = x^{l-1}e^{k_0x}$, o bien $x^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, o bien $x^{l-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ $(l = 1, 2, \ldots)$.

Nos interesarán los procedimientos de obtención de la solución particular de la ecuación (1). Esto tiene importancia, porque para obtener la solución general de la ecuación (1) es necesario hallar cualquier solución particular suya y agregarle la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. Ya sabemos encontrar la solución general (véase el § 1.15).

Examinemos primeramente el caso más simple $f(x) = ae^{k_0 x}$. El polinomio característico de la ecuación (1) tiene la forma

$$R_n(k) = k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_0.$$

Si k_0 no es la raíz de la ecuación característica

$$R_n(k) = 0, \tag{2}$$

entonces la solución particular de la ecuación

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0 y = ae^{k_0 x} \tag{3}$$

se puede hallar en forma de la función

$$y = Ae^{k_0 x}, \tag{4}$$

donde A es la constante. Sustituyendo esta función en la ecuación (3), obtenemos $AR_n(k_0)\, e^{k_0 x} = ae^{k_0 x}$, de donde, después de efectuar la simplificación eliminando el factor $e^{k_0 x}$ (¡no igual a cero!), obtenemos $AR_n(k_0) = a$ o bien

$$A = a/R_n(k_0) \tag{5}$$

y el número A queda hallado.

EJEMPLO 1. A la ecuación

$$y'' + y = e^x \tag{6}$$

le corresponde la ecuación característica

$$R_2(k) = k^2 + 1 = 0.$$

El número $k_0 = 1$ no es la raíz de la ecuación característica ($R_2(k_0) = R_2(1) = 2 \neq 0$), por eso la solución particular (6) se puede buscar en forma de $y = Ae^x$. Con arreglo a (5) $A = (R_2(1))^{-1} = 1/2$. La solución general de la ecuación (6) tiene la forma

$$y = \frac{1}{2}e^x + C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x,$$

donde C_1, C_2 son las constantes arbitrarias.

Si k_0 es la raíz de la ecuación característica (2), entonces, evidentemente, la ecuación (3) no tiene la solución de forma (4). En este caso nos ayudará el lema siguiente.

LEMA 1. *Si k_0 es una raíz real o compleja de orden de multiplicidad m de la ecuación característica* (2), *entonces la solución particular de la ecuación diferencial* (3) *se puede hallar en la forma*

$$y = Ax^m e^{k_0 x},$$

donde A es cierta constante.

Citemos primero un ejemplo.

EJEMPLO 2.

$$y'' - 2y' + y = e^x. \tag{7}$$

La ecuación característica es $k^2 - 2k + 1 = 0$, o bien $(k-1)^2 = 0$. El número $k_0 = 1$ es su raíz de orden de multiplicidad 2. Por eso, de acuerdo con el lema 1, es necesario hallar la solución en la forma

$$y = Ax^2 e^x.$$

Tenemos

$$y' = A \cdot 2xe^x + Ax^2 e^x,$$
$$y'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2 e^x.$$

Sustituyendo en (7), obtenemos

$$2Ae^x = e^x.$$

Por lo tanto, $A = 1/2$ y la solución general es

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^x + (C_1 + C_2 x) e^x.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Apliquemos a ambos miembros de la ecuación diferencial (3) la operación (el operador)

$$\frac{d}{dx} - k_0 \left(\left(\frac{d}{dx} - k_0 \right) u = \frac{du}{dx} - k_0 u \right).$$

De aquí en el segundo miembro tendremos

$$\left(\frac{d}{dx} - k_0 \right) ae^{k_0 x} = \frac{d}{dx} (ae^{k_0 x}) - k_0 ae^{k_0 x} = 0.$$

Por eso

$$\left(\frac{d}{dx} - k_0 \right) L_n [y] = 0. \tag{8}$$

Hemos obtenido la ecuación diferencial de orden $(n+1)$ con coeficientes constantes. Su ecuación característica tiene la forma

$$(k - k_0) R_n (k) = 0. \tag{9}$$

La ecuación $R_n (k) = 0$ y la ecuación (9) tienen las mismas raíces pero la raíz k_0 de la ecuación (9) es de orden de multiplicidad $m + 1$

(es decir, mayor en una unidad). Escribiremos la solución general de la ecuación homogénea

$$L_n[y] = 0 \tag{10}$$

así:

$$v = (C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1})\, e^{k_0 x} + \sum_{j=m+1}^{n} C_j y_j(x),$$

donde $y_{m+1}, \ldots, y_n$ son las soluciones correspondientes a las raíces de la ecuación característica que no son iguales a k_0, si tales raíces existen. La solución general de la ecuación (8) se puede escribir en la forma

$$z = Ax^m e^{k_0 x} + v.$$

Toda solución y de la ecuación (3) es la solución de la ecuación (8) y por eso

$$y = Ax^m e^{k_0 x} + v \tag{11}$$

para cierto conjunto de constantes

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, A. \tag{12}$$

Hemos demostrado que si y es la solución de la ecuación (3) $L_n[y] = ae^{k_0 x}$, se puede escoger las constantes (12) de modo que $y = Ax^m e^{k_0 x} + v$. Para las constantes indicadas (12) tendremos

$$L_n[Ax^m e^{k_0 x}] = L_n[y - v] = L_n[y] - L_n[v] = ae^{k_0 x} - 0 = ae^{k_0 x}.$$

De este modo hemos demostrado que existe un número A tal para el cual la función

$$y = Ax^m e^{k_0 x}$$

es la solución de la ecuación diferencial no homogénea (3). El lema queda demostrado.

Examinemos ahora dos ecuaciones diferenciales

$$y_1^{(n)} + p_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots + p_0 y_1 = ax^{l-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \tag{13}$$

$$y_2^{(n)} + p_{n-1} y_2^{(n-1)} + \ldots + p_0 y_2 = ax^{l-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \tag{14}$$

donde α, β, p_j son números reales y l, un número natural. Multiplicando la segunda de ellas por i y sumándola con la primera, obtenemos la ecuación

$$z^{(n)} + p_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + p_0 z = ax^{l-1} e^{k_0 x},$$

$$z = y_1 + iy_2, \quad k_0 = \alpha + i\beta. \tag{15}$$

En vez de dos ecuaciones (13) y (14) con las funciones incógnitas $y_1(x)$, $y_2(x)$ hemos obtenido una sola ecuación (15) con la función

compleja incógnita $z(x) = y_1(x) + iy_2(x)$. Si la solución $z = y_1 + iy_2$ de la ecuación (15) está hallada, entonces su parte real y_1 será la solución de la ecuación (13) y su parte imaginaria y_2, la solución de la ecuación (14).

La ecuación (15) ya ha sido investigada para $l = 1$.

EJEMPLO 3. Se da la ecuación

$$y'' + y = \operatorname{sen} x. \tag{16}$$

Junto con ésta examinemos la ecuación

$$y'' + y = \cos x. \tag{17}$$

Tenemos

$$y_1'' + y_1 = \cos x, \quad y_2'' + y_2 = \operatorname{sen} x.$$

Multiplicando la segunda ecuación por i y sumándola con la primera, obtenemos

$$z'' + z = e^{ix}, \quad z = y_1 + iy_2. \tag{18}$$

El número $k_0 = i$ es la raíz de orden de multiplicidad 1 de la ecuación característica, por eso la solución particular debe hallarse en la forma $z = Axe^{ix}$. Tenemos

$$z' = Ae^{ix} + Aixe^{ix}, \quad z'' = 2Aie^{ix} - Axe^{ix}.$$

Sustituyendo z, z' y z'' en la ecuación (18), obtenemos

$$2Aie^{ix} = e^{ix}, \quad A = 1/(2i) = -i/2.$$

La solución particular de la ecuación (18) tiene la forma

$$z = -\frac{ix}{2} e^{ix} = -\frac{ix}{2}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = \frac{x}{2} \operatorname{sen} x - i\frac{x}{2} \cos x.$$

Su parte imaginaria

$$y = -\frac{x}{2} \cos x$$

es la solución particular de la ecuación dada (16), mientras que su parte real es la solución particular de la ecuación (17).

El caso $l > 1$ (para la ecuación (15)) se prevé en el lema siguiente.

LEMA 2. *La solución particular* (15) *se puede hallar entre las funciones que tienen la forma*

$$C_m x^m + \ldots + C_{m+l-1} x^{m+l-1}) e^{k_0 x}, \tag{19}$$

donde m es el orden de multiplicidad de la raíz k_0 de la ecuación característica $R_n(k) = 0$ y $C_m, C_{m+1}, \ldots, C_{m+l-1}$ son las constantes.

Si k_0 no es la raíz de la ecuación $R_n(k) = 0$, entonces, a pesar de esto, se puede formalmente considerar que k_0 es la raíz de orden de

multiplicidad 0. En este caso es necesario en la fórmula (19) suponer $m = 0$ y buscar la solución particular en la forma

$$(C_0 + C_1 x + \ldots + C_{l-1} x^{l-1})\, e^{k_0 x}.$$

La demostración se efectúa de un modo análogo a la del lema 1.

La solución general de la ecuación homogénea $L_n[z] = 0$ se escribe así:

$$v = (C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-1} x^{m-1})\, e^{k_0 x} + \sum_{j=m+1}^{n} C_j z_j(x), \qquad (20)$$

donde $z_{m+1}, \ldots, z_n$ son las soluciones que corresponden a las raíces, no iguales a k_0, si tales existen.

Sometamos la ecuación (15) a la operación $\left(\frac{d}{dx} - k_0\right)^l$. Ya que

$$\left(\frac{d}{dx} - k_0\right)(a x^{l-1} e^{k_0 x}) = \frac{d}{dx}(a x^{l-1} e^{k_0 x}) - k_0 a x^{l-1} e^{k_0 x} = a(l-1) x^{l-2} e^{k_0 x},$$

entonces

$$\left(\frac{d}{dx} - k_0\right)^l (a x^{l-1} e^{k_0 x}) = \left(\frac{d}{dx} - k_0\right)(a(l-1)\, e^{k_0 x}) = 0.$$

Por eso obtenemos la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes

$$\left(\frac{d}{dx} - k_0\right)^l L_n[z] = 0. \qquad (21)$$

La ecuación característica de ésta tiene las mismas raíces que la ecuación $R_n(k) = 0$, pero el orden de multiplicidad de k_0 es mayor en el número l. Por eso la solución general de la ecuación (21) se puede escribir en la forma

$$z = (C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m+l-1} x^{m+l-1})\, e^{k_0 x} + \sum_{k=m+1}^{n} C_k z_k =$$
$$= v + (C_m x^m + \ldots + C_{m+l-1} x^{m+l-1})\, e^{k_0 x}. \qquad (22)$$

Toda solución z de la ecuación (15) es la solución de la ecuación (21) y por eso puede ser escrita en la forma (22). Pero entonces

$$L_n[(C_m x^m + \ldots + C_{m+l-1} x^{m+l-1})\, e^{k_0 x}] =$$
$$= L_n[z - v] = L_n[z] - L_n[v] = a x^{l-1} e^{k_0 x}$$

lo que muestra que la función (19), al estar elegidas convenientemente las constantes $C_m, \ldots, C_{m+l-1}$, es la solución particular de la ecuación (15).

EJEMPLO 4. $y'' - y = xe^x$ $(k_0 = 1,\ l = 2)$.

La ecuación característica $k^2 - 1 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = \pm 1$. El número $k_0 = 1$ es la raíz de una ecuación característica cuyo orden

de multiplicidad vale 1. Por eso, conforme al lema 2, la solución particular se busca en la forma

$$y = (Ax + Bx^2)\, e^x.$$

Tenemos

$$y' = [A + (A + 2B)\, x + Bx^2]\, e^x,$$
$$y'' = [2\,(A + B) + (A + 4B)\, x + Bx^2]\, e^x.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos

$$e^x\,(2A + 2B + 4Bx) = xe^x,$$

de donde

$$2A + 2B = 0, \quad 4B = 1,$$

o sea,

$$A = -1/4, \quad B = 1/4.$$

Por lo tanto, la solución particular de nuestra ecuación será

$$y = (-x + x^2)\, e^x/4$$

y la solución general será

$$y = \left(-\frac{x}{4} + \frac{x^2}{4}\right) e^x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Observación. Si la función y_i es la solución de la ecuación

$$L_n\,[y] = f_i\,(x) \quad (i = 1, \ldots, q),$$

entonces la función $y = \sum_{i=1}^{q} y_i$ es la solución de la ecuación

$$L_n\,[y] = L_n\,[\sum_{i=1}^{q} y_i] = \sum_{i=1}^{q} L_n\,[y_i] = \sum_{i=1}^{q} f_i\,(x).$$

De aquí y de lo dicho anteriormente queda claro que la forma de la solución particular de la ecuación no homogénea $L_n\,[y] = f\,(x)$ cuyo segundo miembro tiene el aspecto

$$f\,(x) = P_{m-1}\,(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + Q_{m-1}\,(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

donde $P_{m-1}\,(x)$, $Q_{m-1}\,(x)$ son ciertos polinomios algebraicos de un grado no superior a $(m - 1)$, coincide con la forma del segundo miembro si $\alpha \pm i\beta$ no son las raíces de la ecuación característica $R_n\,(k) = 0$.

Si los números $\alpha \pm i\beta$ son las raíces de la ecuación característica con orden de multiplicidad l, entonces la solución particular hay que buscarla asimismo en la forma del segundo miembro, pero los grados de los polinomios algebraicos se deben elevar en l unidades.

Notemos que si en el segundo miembro está presente, por ejemplo, el sumando $Q_{m-1}(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x$, entonces es necesario buscar la solución particular en forma de dos sumandos

$$R_1(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + R_2(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

donde $R_1(x)$ y $R_2(x)$ son los polinomios de grados respectivos.

EJEMPLO 5. Escribir la forma de la solución particular de la ecuación

$$y'' + y = x \operatorname{sen} x.$$

La ecuación característica $k^2 + 1 = 0$ tiene las raíces $\pm i$. Al segundo miembro $x \operatorname{sen} x$ le corresponde el número $k_0 = \alpha \pm i\beta = 0 \pm i1 = \pm i$. Estos números son las raíces de orden de multiplicidad 1 de la ecuación característica, por eso la solución particular se debe buscar en la forma

$$y(x) = (Ax + Bx^2) \operatorname{sen} x + (Cx + Dx^2) \cos x.$$

EJEMPLO 6. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = x^2 e^x$; la ecuación característica $k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1 = (k-1)^4 = 0$. Al segundo miembro $x^2 e^x$ le corresponde el número $\alpha = 1$ el cual es la raíz de cuarto orden de multiplicidad de la ecuación característica. Por lo tanto, la ecuación particular debe buscarse en la forma

$$y(x) = (Ax^4 + Bx^5 + Cx^6)\, e^x.$$

§ 1.19. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Espacio de fases

Al estudiar la ley de movimiento de un punto material de masa m es cómodo hacerse uso de la forma vectorial de notación de las ecuaciones. Supongamos, pues, que $r = r(t)$ es la ley de movimiento de un punto material en el espacio R^3, donde t es el tiempo. Esto significa que en el instante de tiempo t el punto tiene el radio vector $r(t)$, o lo que es lo mismo, las coordenadas $\{x(t), y(t), z(t)\}$.

Si un punto de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza dada (vector) $F(t, r, \dot{r})$, entonces, según la ley de Newton y la interpretación mecánica de la segunda derivada, la función $r(t)$ debe satisfacer la ecuación de movimiento

$$m\ddot{r} = F(t, r, \dot{r}). \tag{1}$$

La ecuación vectorial (1) es equivalente al sistema de tres ecuaciones escalares

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

donde X, Y, Z son las proyecciones del vector F sobre los ejes de coordenadas x, y, z.

Si suponemos incógnitas no solamente las coordenadas del punto x, y, z sino también las proyecciones de la velocidad

$$\frac{dr}{dt} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\},$$

obtenemos el sistema de seis ecuaciones de primer orden

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= u, \quad m\frac{du}{dt} = X(t, x, y, z, u, v, w), \\ \dot{y} &= v, \quad m\frac{dv}{dt} = Y(t, x, y, z, u, v, w), \\ \dot{z} &= w, \quad m\frac{dw}{dt} = Z(t, x, y, z, u, v, w). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

La ecuación vectorial (1) se puede escribir también en forma del sistema de dos ecuaciones vectoriales, si la velocidad $V = \frac{dr}{dt}$ se considera como función vectorial incógnita:

$$\frac{dr}{dt} = V, \quad m\frac{dV}{dt} = F(t, r, V), \qquad (1')$$

donde V es el vector con las proyecciones u, v, w.

Si se introduce para el examen el vector

$$R(t) = \{x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\},$$

entonces la ecuación (1) o el sistema (3) son equivalentes a una sola ecuación vectorial de primer orden

$$\frac{dR}{dt} = \Phi(t, x, y, z, u, v, w) \qquad (4)$$

en el espacio sexadimensional, con la particularidad de que el vector

$$\Phi = \left\{u, v, w, \frac{1}{m}X, \frac{1}{m}Y, \frac{1}{m}Z\right\}.$$

El espacio sexadimensional de los puntos

$$(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) \equiv (r_x,\ r_y,\ r_z,\ V_x,\ V_y,\ V_z)$$

en la física se llama espacio *de fases* y la curva $\boldsymbol{R}\ (t)$ que es la solución de (4) en el espacio sexadimensional se denomina *trayectoria de fases*.

El espacio de fases es el espacio de los estados de movimiento de un punto por una curva.

Las primeras tres coordenadas $\boldsymbol{R}\ (t)$ caracterizan la posición del punto en el espacio tridimensional $(r\ (t))$ y las otras tres coordenadas $\boldsymbol{R}\ (t)$, su velocidad $\dot{r}\ (t)$.

La terminología citada ofrece la así llamada *interpretación cinemática del sistema de ecuaciones*.

El sistema (3) ó, lo que es lo mismo, el sistema (4) se denomina sistema *dinámico*.

Para separar una trayectoria es necesario asignar las condiciones iniciales: $\boldsymbol{R}\ (t_0) = \boldsymbol{R}_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0)$ o sea, la posición inicial del punto y su velocidad inicial. Con otras palabras, la curva integral $\boldsymbol{R}\ (t)$ debe pasar por el punto $\boldsymbol{R}_0$ del espacio sexadimensional.

Ahora bien, los problemas físicos nos conducen a la necesidad de examinar los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Examinemos un sistema arbitrario de ecuaciones diferenciales de primer orden que tienen la forma

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k\ (t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \quad (k = 1,\ \ldots,\ n), \tag{5}$$

donde $y_k\ (t)$ son las funciones buscadas y $f_k\ (t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$ son las funciones conocidas dadas sobre cierto conjunto de puntos $(t,\ y_1,\ \ldots\ \ldots,\ y_n)$ del espacio de $(n + 1)$ dimensiones.

Nos interesarán las soluciones $y_1\ (t),\ \ldots,\ y_n\ (t)$ del sistema (5) que satisfacen las condiciones iniciales

$$y_1\ (t_0) = y_{10},\ \ldots,\ y_n\ (t_0) = y_{n0}, \tag{6}$$

donde $(y_{10},\ \ldots,\ y_{n0})$ es el punto dado del espacio de n dimensiones.

El sistema (5) (¡resuelto respecto a las derivadas de las funciones buscadas!) se llama *normal* (véanse los §§ 1.12, 1.13).

Si las funciones f_k no dependen explícitamente de la variable independiente t, el sistema (5) se denomina *sistema normal autónomo*

$$\dot{y}_k = f_k\ (y_1,\ \ldots,\ y_n) \quad (k = 1,\ \ldots,\ n). \tag{7}$$

Si se introducen los vectores en el espacio de n dimensiones

$$y = \{y_1\ (t),\ \ldots,\ y_n\ (t)\},\quad y_0 = \{y_{10},\ \ldots,\ y_{n0}\},$$
$$F\ (t,\ y) = \{f_1\ (t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\ \ldots,\ f_n\ (t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)\},$$

el sistema (5) puede escribirse en la forma

$$\dot{y} = F(t, y) \tag{5'}$$

y las condiciones iniciales (6), en la forma

$$y(t_0) = y_0. \tag{6'}$$

El sistema autónomo se puede escribir así:

$$\dot{y} = F(y), \quad F = \{f_1(y), \ldots, f_n(y)\}. \tag{7'}$$

El sistema autónomo puede ser interpretado del modo siguiente. De cada punto $(y_1, \ldots, y_n)$ de cierto conjunto del espacio de n dimensiones sale el vector

$$F(y) = \{f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_n)\},$$

lo que define sobre el conjunto indicado el *campo de vectores*.

La solución $y(t)$ describe una trayectoria determinada de movimiento del punto en el espacio de n dimensiones, además, el vector de velocidad $\dot{y}(t)$, en el instante en que el punto pasa por $(y_1, \ldots, y_n)$, coincide con el vector $F(y)$.

El espacio de n dimensiones de los puntos $(y_1, \ldots, y_n)$ en el cual se interpretan las soluciones del sistema autónomo (7') en forma de trayectorias se llama *espacio de fases del sistema*.

Las trayectorias $y(t)$ se denominan *trayectorias de fases* y los vectores $F(y)$, *velocidades de fases*.

La cuestión acerca de la existencia de la solución de un sistema normal ha sido examinada en el § 1.12.

§ 1.20. Sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales

El sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}(t)\, y_1 + \ldots + a_{1n}(t)\, y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}(t)\, y_1 + \ldots + a_{nn}(t)\, y_n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde los coeficientes $a_{kl}(t)$ son las funciones (o números constantes) dadas, continuas en un intervalo (a, b), se llama *sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden*.

Para abreviar la notación de los sistemas es cómodo usar designaciones vectoriales-matriciales. Introduzcamos la matriz de los coeficientes del sistema (1)

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) \dots a_{1n}(t) \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}(t) \dots a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

y escribamos el sistema buscado de funciones en forma de la matriz columna

$$y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}=\text{colon}\,[y_1, \dots, y_n].$$

Vamos a familiarizarnos con ciertos conceptos generales que se refieren a las matrices. Supongamos por ahora que $A(t)$ es una función arbitraria.

Si las funciones $a_{kl}(t)$ son continuamente derivables, se puede introducir el concepto de *derivada de una matriz*, a saber: es una matriz compuesta por los elementos derivados de la matriz inicial. Así, pues,

$$A'(t)=\frac{dA(t)}{dt}=\dot{A}(t)=\begin{pmatrix} \dot{a}_{11}(t) \dots \dot{a}_{1n}(t) \\ \dots\dots\dots \\ \dot{a}_{n1}(t) \dots \dot{a}_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar las propiedades siguientes:

1) Si C es una matriz constante, entonces $\frac{dC}{dt}=O$, donde O es una matriz nula, todos sus elementos son nulos.

2) Si las matrices $A(t)$ y $B(t)$ son de una misma dimensión, entonces

$$\frac{d}{dt}[A(t)+B(t)]=\dot{A}(t)+\dot{B}(t).$$

3) Si para las matrices $A(t)$ y $B(t)$ se puede cumplir la multiplicación, entonces

$$\frac{d}{dt}[A(t)B(t)]=\dot{A}(t)B(t)=A(t)\dot{B}(t).$$

4) Supongamos que $A^{-1}(t)$ es la matriz inversa de $A(t)$, es decir,

$$A^{-1}(t)A(t)=A(t)A^{-1}(t)=E,$$

donde E es la matriz unidad. Derivando esta igualdad, obtenemos

$$\dot{A}(t)\,A^{-1}(t)+A(t)\,\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=O,$$

$$A(t)\,\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=-\dot{A}(t)\,A^{-1}(t),$$

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)\,\dot{A}(t)\,A^{-1}(t).$$

De un modo análogo se puede introducir el concepto de *integral de una matriz*, a saber: es una matriz cuyos elementos son las integrales de los elementos de la matriz inicial:

$$\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau=\left(\int_{t_0}^{t}a_{kl}(\tau)\,d\tau\right),\quad t_0,\ t\in[a,\ b].$$

El concepto dado posee unas propiedades semejantes a las habituales de las integrales de las funciones. Notemos solamente una propiedad, o sea, el análogo de la fórmula de Newton — Leibniz [1]).

Si $F(t)=\Phi'(t)$, entonces

$$\int_{t_0}^{t}F(\tau)\,d\tau=\Phi(t)-\Phi(t_0).$$

Conforme a la regla de multiplicación de las matrices el sistema (1) se puede escribir así:

$$\frac{dy}{dt}=A(t)\,y. \tag{1'}$$

Recordemos que por igualdad de matrices se entiende la igualdad de sus elementos correspondientes.

Señalemos sus propiedades evidentes.

Si las funciones vectoriales y y z satisfacen el sistema (1'), o sea,

$$\frac{dy}{dt}=A(t)\,y,\quad \frac{dz}{dt}=A(t)\,z,$$

su suma también satisface el sistema (1'):

$$\frac{d(y+z)}{dt}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=A(t)\,y+A(t)\,z=A(t)\,(y+z). \tag{2}$$

Además, si c es un número, la función vectorial cy satisface el sistema (1'):

$$\frac{d(cy)}{dt}=c\,\frac{dy}{dt}=cA(t)\,y=A(t)\,(cy). \tag{3}$$

[1]) I. Newton (1642—1727), gran físico, mecánico, astrónomo y matemático inglés. G. W. Leibniz (1646—1716), gran matemático y filósofo alemán.

Por inducción, de estas propiedades se deduce que si

$$y^1(t) = \text{colon}\,[y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t)], \ldots, y^n(t) = \\ = \text{colon}\,[y_{1n}(t), \ldots, y_{nn}(t)] \qquad (4)$$

son las soluciones del sistema (1') y $C_1, \ldots, C_n$ son los números arbitrarios, entonces

$$y(t) = C_1 y^1(t) + \ldots + C_n y^n(t) \qquad (5)$$

es la solución de (1').

Es importante notar que *si el sistema* (4) *de soluciones es linealmente independiente, la fórmula* (5) *expresa la solución general del sistema* (1'); *con otras palabras, la fórmula* (5) *para diferentes constantes* $C_1, \ldots, C_n$ *contiene todas las soluciones posibles del sistema* (1').

Esta afirmación se puede demostrar al igual que en el caso de una ecuación lineal de *n*-ésimo orden.

El sistema (4) de funciones vectoriales se llama *linealmente independiente en un intervalo* (a, b) *si de la igualdad*

$$C_1 y^1(t) + \ldots + C_n y^n(t) \equiv o \quad (a < t < b) \qquad (6)$$

se desprende que $C_1 = \ldots = C_n = 0$.

Puesto que la ecuación vectorial (6) es equivalente a n igualdades escalares

$$\left.\begin{aligned} C_1 y_{11}(t) + \ldots + C_n y_{1n}(t) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ C_1 y_{n1}(t) + \ldots + C_n y_{nn}(t) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

del hecho de que el determinante

$$W(t) = |\, y_{hl}(t) \,| \qquad (7)$$

no es igual a cero al menos para un solo valor de t, ya viene, evidentemente, la independencia lineal del sistema (4) de las funciones vectoriales.

El determinante $W(t)$ se llama *determinante de Wronski del sistema* (4) *de funciones vectoriales.*

Si el sistema de vectores (4) es linealmente independiente en un intervalo (a, b) y estos vectores son las soluciones del sistema (1') con coeficientes continuos, se puede demostrar que $W(t) \neq 0$ para todos los valores de $t \in (a, b)$.

Ahora bien, la *condición* $W(t) \neq 0$ *para todos los valores de* $t \in (a, b)$ *es la condición necesaria y suficiente de la independencia lineal, en* (a, b), *de las soluciones* (4) *del sistema* (1) *con coeficientes continuos.*

Por lo tanto, para obtener la *solución general del sistema homogéneo* (1) *es necesario hallar n soluciones linealmente independientes* (4) *del sistema* (1). *La suma* (5), *donde* $C_1, \ldots, C_n$ *son las constantes arbitrarias, es la solución general del sistema* (1).

Notemos que las soluciones $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ del sistema (1) existen en el mismo intervalo (a, b), donde están definidos y son continuos los coeficientes $a_{kl}(t)$ del sistema (1).

El sistema de n soluciones del sistema (1) linealmente independientes en (a, b) suele llamarse *sistema fundamental de soluciones* del sistema (1).

Este sistema puede caracterizarse por la matriz cuadrada

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \ldots & y_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

que se denomina *matriz fundamental del sistema* (1).

Ahora bien, en una matriz fundamental las soluciones (4) se sitúan por las columnas. Tengamos presente que en la notación $y_{jk}(t)$ el primer índice j designa el número de orden de la coordenada y el segundo índice k, el número de orden de la solución.

Mostremos que la matriz fundamental $Y(t)$ satisface la ecuación matricial

$$\dot{Y}(t) = A(t)\, Y(t). \tag{8}$$

Como las funciones $y_{sk}(t)$ satisfacen la j-ésima ecuación del sistema (1), entonces

$$\frac{dy_{jk}(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)\, y_{sk}(t).$$

Por consiguiente, según la regla de multiplicación de las matrices (en el caso dado de matrices cuadradas), tenemos

$$\dot{Y}(t) = \left(\frac{dy_{jk}(t)}{dt}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)\, y_{sk}(t)\right) = A(t)\, Y(t)$$

que es lo que era necesario demostrar.

Inversamente, si la matriz $Y(t) = (y_{jk}(t))$ satisface la ecuación matricial (8), sus columnas

$$y^k(t) = \text{colon}\,[y_{1k}(t), \ldots, y_{nk}(t)] \quad (k = 1, \ldots, n)$$

son las soluciones del sistema homogéneo lineal (1).

Si en este caso

$$|\,Y(t)\,| = W(t) \neq 0,$$

la matriz $Y(t)$ es fundamental.

En efecto,

$$y^k(t) = Y(t)\, e_k,$$

donde e_k = colon [0, . . ., 0, 1, 0, . . ., 0]. Multiplicando el segundo miembro de la ecuación (8) por e_k, obtenemos

$$\frac{dY(t)}{dt} e_k = \frac{d}{dt}[Y(t)\, e_k] = A(t)\,[Y(t)\, e_k],$$

o sea,

$$\frac{d}{dt} y^k(t) = A(t)\, y^k(t) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Si $Y(t)$ es la matriz fundamental del sistema (1), entonces la solución general (5) del sistema (1) puede escribirse abreviadamente en la forma

$$y(t) = Y(t)\, C, \tag{9}$$

donde C = colon $[C_1, \ldots, C_n]$ es la matriz columna constante con elementos arbitrarios.

Poniendo en la identidad (9) $t = t_0$, tendremos

$$y(t_0) = Y(t_0)\, C.$$

De aquí

$$C = Y^{-1}(t_0)\, y(t_0).$$

Por lo tanto,

$$y(t) = Y(t)\, Y^{-1}(t_0)\, y(t_0).$$

La matriz

$$Y(t)\, Y^{-1}(t_0) = K(t, t_0)$$

lleva el nombre de *matriz de Cauchy*.

Con ayuda de esta matriz la solución del sistema (1) se puede escribir así:

$$y(t) = K(t, t_0)\, y(t_0). \tag{10}$$

En particular, si la matriz fundamental $Y(t)$ está normalizada para $t = t_0$, o sea, $Y(t_0) = Y^{-1}(t_0) = E$, donde E es la matriz unidad, la fórmula (10) toma el aspecto

$$y(t) = Y(t)\, y(t_0). \tag{11}$$

§ 1.21. Solución general de un sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

Busquemos la solución de un sistema homogéneo lineal con coeficientes constantes a_{kl}

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

o bien

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{1'}$$

donde $A = \| a_{kl} \|$ es la matriz numérica dada, en la forma siguiente:

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \ \ldots, \ y_n = \alpha_n e^{\lambda t} \tag{2}$$

o bien

$$y = \{\alpha_1 e^{\lambda t}, \ \ldots, \ \alpha_n e^{\lambda t}\}. \tag{2'}$$

Los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda$ se someten a la definición.
Desde luego, los números

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \ \ldots, \ \alpha_n = 0$$

ofrecen la solución trivial del sistema (1):

$$y_1(t) \equiv 0, \ \ldots, \ y_n(t) \equiv 0.$$

Sin embargo, nos interesan *soluciones no triviales* que correspondan a los vectores no iguales a cero.

$$\alpha = (\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n).$$

Tenemos

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i \lambda e^{\lambda t} \quad (i = 1, \ \ldots, n).$$

Al sustituir las funciones $y_i(t)$ y sus derivadas en (1), simplificando en $e^{\lambda t}$ $(e^{\lambda t} \neq 0)$ y trasladando los términos en un miembro obtenemos

$$\left.\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\
a_{21}\alpha_2 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

o bien en la forma matricial

$$(A - \lambda E)\,\alpha = O, \tag{3'}$$

o bien

$$A\alpha = \lambda\alpha, \tag{4}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n)$ y

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz unidad.

Para que el sistema (3) tenga una solución no trivial es necesario y suficiente que su determinante sea igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

La ecuación (5) se llama *ecuación característica* del sistema (1). Es de la ecuación (5) de donde encontramos aquellos valores λ para los cuales el sistema (4) tiene soluciones no triviales α.

El primer miembro de (5) es un polinomio de grado n respecto a la variable λ. Si se toma en consideración la multiplicidad, este polinomio tiene n raíces:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n. \tag{6}$$

Si todas las n raíces son distintas, entonces, sustituyendo cada una de ellas λ_j en el sistema (4) y resolviendo éste, obtenemos cierto vector no trivial que satisface el sistema dado

$$\alpha^{(j)} = (\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)}). \tag{7}$$

Este vector se determina de una manera multiforme, con una exactitud hasta el factor escalar.

De (4) se ve que λ_j son los valores propios de la matriz (transformación lineal) A y los vectores $\alpha^{(j)}$, los vectores propios de A.

Los vectores $\alpha^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ son linealmente independientes, si todos sus valores propios son diferentes. Esto se puede demostrar por inducción.

Demostremos que cualesquiera k vectores de este sistema son linealmente independientes entre sí.

Para $k = 1$ esto es evidente, porque cada uno de los vectores $\alpha^{(j)}$ no es trivial. Supongamos que nuestra afirmación es justa para $k - 1$ vectores. Vamos a demostrarla para k vectores.

Admitamos lo contrario. Por ejemplo, sean los primeros k vectores de nuestro sistema linealmente dependientes. Entonces

$$\sum_{j=1}^{k} C_j \alpha^{(j)} = o, \tag{8}$$

donde al menos uno de los coeficientes C_j es distinto de cero. Para precisar consideremos $C_1 \neq 0$. Apliquemos la transformación lineal, engendrada por la matriz A, a ambos miembros de (8):

$$A\left(\sum_{j=1}^{k} C_j \alpha^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{k} C_j \lambda_j \alpha^{(j)} = o. \tag{9}$$

Multiplicando (8) por λ_k y restándolo de (9), obtenemos

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha^{(1)} + C_2(\lambda_2 - \lambda_k)\alpha^{(2)} + \ldots + C_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha^{(k-1)} = o,$$

donde $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ para todos los $i \neq k$.

Así, pues, $C_1(\lambda_1 - \lambda_k) \neq 0$ y hemos obtenido que los vectores $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k-1)}$ son linealmente dependientes lo que contradice la suposición.

Así, pues, los vectores propios $\alpha^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ que responden a diferentes números propios λ_j son linealmente independientes y el determinante compuesto por las coordenadas de estos vectores no es igual a cero:

$$|\alpha_k^{(j)}| \neq 0\ ^1).$$

Observación 1. Puesto que en el espacio de n dimensiones no pueden haber más de n vectores linealmente independientes, entonces a cada valor propio de λ_j (¡si todos ellos son diferentes!) le corresponde un solo vector propio con una exactitud hasta el factor constante.

Como resultado obtenemos n funciones vectoriales, o sea, soluciones del sistema (1)

$$\left.\begin{aligned} y^1(t) &= \{\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \ldots, \alpha_n^{(1)}e^{\lambda_1 t}\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n(t) &= \{\alpha_1^{(n)}e^{\lambda_n t}, \alpha_2^{(n)}e^{\lambda_n t}, \ldots, \alpha_n^{(n)}e^{\lambda_n t}\}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$(-\infty < t < \infty)$$

La función vectorial (10) forma un sistema linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$, ya que su determinante de Wronski

$$W(t) = \exp(\lambda_1 t + \ldots + \lambda_n t) \cdot |\alpha_k^{(j)}| \neq 0.$$

Por eso la solución general del sistema (1) tiene la forma

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j y^j(t), \quad (11)$$

donde C_j son constantes arbitrarias. En la forma desarrollada la solución general puede escribirse así:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= \sum_{j=1}^{n} C_j \alpha_1^{(j)} \exp(\lambda_j t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(t) &= \sum_{j=1}^{n} C_j \alpha_n^{(j)} \exp(\lambda_j t). \end{aligned}\right\} \quad (11')$$

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 14, teorema 1.

Observación 2. En la práctica, en vez de encontrar los vectores $\alpha^{(j)} = (\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)})$ de los sistemas lineales (4), buscan la solución general del sistema (1) en la forma

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_1^{(j)} \exp(\lambda_j t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_n^{(j)} \exp(\lambda_j t), \end{aligned}\right\}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son las raíces de la ecuación característica (¡diferentes!) y $a_k^{(j)}$, los números que es necesario encontrar. De la teoría expuesta resulta que tales números existen.

Para hallar los números $a_k^{(j)}$ sustituimos las funciones $y_j(t)$ en el sistema (1) y comparamos los coeficientes de iguales $\exp(\lambda_j t)$. En este caso los números $a_k^{(j)}$ se obtienen no de un modo unívoco, ellos dependen de n constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1. Resolver el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y,$$

$$\frac{dy}{dt} = y + 2x.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda - 1)^2 - 4 = 0,$$

tiene las raíces $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Partiendo de la estructura de la solución general, buscaremos la solución en la forma

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y(t) = a_1 e^{3t} + a_2 e^{-t}$$

(o sea, omitiremos el proceso de obtención de los números $\alpha_k^{(j)}$).

Expresemos los coeficientes a_1, a_2 por C_1, C_2. Sustituyendo las funciones $x(t)$ e $y(t)$ en una de las ecuaciones del sistema, obtenemos

$$3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + 2a_1 e^{3t} + 2a_2 e^{-t},$$

de donde $2C_1 - 2a_1 = 0$, $-2C_2 - 2a_2 = 0$, o sea,

$$a_1 = C_1, \quad a_2 = -C_2.$$

Ahora bien, la solución general tiene la forma

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t},$$
$$y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}.$$

Supongamos ahora que la ecuación característica (5) del sistema (1) tiene la raíz λ_1 de orden de multiplicidad r. Reduzcamos el sistema (1) a una sola ecuación de n-ésimo orden respecto a la función $y_1(t)$. Esta ecuación y el sistema (1) tienen una misma ecuación característica (la demostración se da a continuación). Pero entonces, como sabemos, a la raíz λ_1 de orden de multiplicidad r le corresponde la solución de la ecuación de n-ésimo orden que tiene la forma

$$y_1(t) = (b_0 + b_1 t + \ldots + b_{r-1} t^{r-1}) e^{\lambda_1 t},$$

donde $b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}$ son las constantes arbitrarias. Ahora bien,

$$y_1(t) = P_{r-1,1}(t) e^{\lambda_1 t},$$

donde $P_{r-1,1}(t)$ es el polinomio de grado $r-1$.

Razonando de un modo análogo, podemos expresar también otras funciones $y_j(t)$ en la forma

$$y_j(t) = P_{r-1,j}(t) e^{\lambda_1 t} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

donde $P_{r-1,j}(t)$ son los polinomios de grado $r-1$.

Cada una de las funciones $y_j(t)$ satisface su propia ecuación diferencial de n-ésimo orden, cualesquiera que sean los coeficientes del polinomio $P_{r-1,j}(t)$.

No nos queda más que escoger entre los polinomios $P_{r-1,1}, \ldots, P_{r-1,n}$ tales cuyas funciones correspondientes $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ satisfagan conjuntamente el sistema (1). Para esto es necesario sustituir y_j en el sistema (1), simplificarlo en $e^{\lambda_1 t}$ y comparar los coeficientes de iguales potencias de t. Los coeficientes buscados dependerán de r constantes arbitrarias. A veces se puede recomendar que el polinomio $P_{r-1,1}(t)$ se tome arbitrario y entonces los coeficientes de los demás polinomios $P_{r-1,j}(t)$ $(j = 2, \ldots, n)$ quedarán determinados unívocamente por los coeficientes $P_{r-1,1}$.

Sin embargo, es posible que por este camino lleguemos a una contradicción que nos muestre que de hecho en el caso dado ciertos coeficientes del polinomio $P_{r-1,1}$ son iguales a cero y no se puede considerarlos como arbitrarios.

Razonamos de un modo análogo también respecto a otras raíces múltiples de la ecuación característica si ésta tiene tales. Las soluciones correspondientes a las raíces simples se buscan en la forma (8), como hemos explicado anteriormente.

Para obtener la resolución general del sistema (1) es necesario tomar la suma de las soluciones (funciones vectoriales) indicadas.

En casos elementales se puede buscar la solución directamente en forma de la suma de soluciones semejantes. Será mejor aclarar esto citando ejemplos.

EJEMPLO 2. Resolver el sistema

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 - y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 + 3y_2.$$

La ecuación característica $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ o bien $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ tiene una raíz múltiple $\lambda_1 = 2$.

La ecuación diferencial que corresponde a nuestro sistema para la función y_1 tiene la forma $\ddot{y}_1 - 4\dot{y}_1 + 4y_1 = 0$. Ella tiene la misma ecuación característica.

La solución del sistema se debe buscar en la forma

$$y_1(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{2t}, \quad y_2(t) = (a_1 + a_2 t)\, e^{2t}.$$

Sustituyendo estas funciones en el sistema, obtenemos

$$C_2 + 2C_1 + 2C_2 t = C_1 + C_2 t - a_1 - a_2 t$$
$$a_2 + 2a_1 + 2a_2 t = C_1 + C_2 t + 3(a_1 + a_2 t).$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de t (en la primera igualdad), obtenemos $a_1 = -C_1 - C_2$, $a_2 = -C_2$. La segunda igualdad ofrece las mismas soluciones. De suerte, la solución general del sistema tiene la forma

$$y_1(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{2t}, \quad y_2(t) = -(C_1 + C_2 + C_2 t)\, e^{2t}.$$

EJEMPLO 3. Resolver el sistema

$$\dot{y}_1 = 2y_1 + y_2 + y_3,$$
$$\dot{y}_2 = y_1 + 2y_2 + y_3,$$
$$\dot{y}_3 = y_1 + y_2 + 2y_3.$$

La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

o bien

$$(1-\lambda)^2 (\lambda - 4) = 0.$$

Ahora bien, $\lambda_1 = 1$ es la raíz de segundo orden de multiplicidad y $\lambda_3 = 4$ es la raíz simple de la ecuación característica. El sistema (3) para $\lambda_1 = 1$ tiene la forma

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Por eso α_1, α_2, α_3 deben ser tales que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, o sea, tenemos dos variables libres, digamos α_2 y α_3.

Por eso, por ejemplo, $\alpha^{(1)} = (-1, 1, 0)$, $\alpha^{(2)} = (-1, 0, 1)$ son los vectores propios linealmente independientes de la matriz A de nuestro sistema (la matriz A es simétrica). Para $\lambda_3 = 4$ encontramos $\alpha^{(3)} = (1, 1, 1)$. Por eso

$$y^1 = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^2 = \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad y^3 = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

son las soluciones linealmente independientes e

$$y = C_1 y^1 + C_2 y^2 + C_3 y^3$$

es la solución general de nuestro sistema.

En la forma desarrollada la solución general puede escribirse así:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -(C_1 + C_2)\, e^t + C_3 e^{4t}, \\ y_2(t) &= C_1 e^t + C_3 e^{4t}, \\ y_3(t) &= C_2 e^t + C_3 e^{4t}. \end{aligned}$$

Observación 3. Si la matriz A es *simétrica* ($a_{kl} = a_{lk}$), entonces el operador lineal correspondiente de A será *autoconjugado* y, como sabemos, en este caso, cualesquiera que sean las raíces que la ecuación (5) tuviera (incluyendo también las múltiples), existe un sistema de n vectores propios α linealmente independientes y, por consiguiente, para el sistema (1) con la matriz simétrica A se puede escribir la solución general, conociendo los vectores $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ [1]).

§ 1.22. Reducción de un sistema de ecuaciones a una sola ecuación

LEMA 1. *Sea dado un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes* a_{kl}

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n - f_1(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n - f_n(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde $f_j(t)$ *son las funciones dadas en* (a, b) *que tienen un número necesario de derivadas.*

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», §§ 15, 22, 25.

Si las funciones $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ *satisfacen este sistema, entonces la función* $y_j(t)$ *satisface la siguiente ecuación diferencial de n-ésimo orden*

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) y_j(t) = \Phi_j(t), \quad (j = 1, \ldots, n),$$

donde

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{2}$$

es el polinomio característico del sistema (1) *y las funciones* $\Phi_j(t)$ *se definen por* a_{kl} *y* f_s $(s = 1, \ldots, n)$ (véase a continuación (4)).

DEMOSTRACION. Escribamos el sistema (1) en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \left(a_{11}-\frac{d}{dt}\right) y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = f_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + \left(a_{nn}-\frac{d}{dt}\right) y_n = f_n(t). \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Designemos el elemento del determinante (2) situado en la k-ésima fila y la l-ésima columna por $b_{kl}(\lambda)$ y el complemento algebraico correspondiente, por $M_{kl}(\lambda)$ (por ejemplo, $b_{11}(\lambda) = a_{11} - \lambda$, $b_{12}(\lambda) = a_{12}$). Si en estas expresiones sustituimos λ por $\frac{d}{dt}$, obtenemos los operadores diferenciales $b_{kl}\left(\frac{d}{dt}\right)$, $M_{kl}\left(\frac{d}{dt}\right)$. Se les puede aplicar los razonamientos semejantes a los aplicados para deducir el teorema de Kronecker [1]).

Tenemos

$$\sum_{s=1}^{n} b_{si}(\lambda) M_{sj}(\lambda) = \delta_{ij} \cdot D(\lambda) \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

(o sea, la suma de los productos de los elementos de cualquier columna del determinante $D(\lambda)$ por los adjuntos de esta misma columna (de otra columna) es igual al determinante $D(\lambda)$ (es igual a cero)). Por eso

$$\sum_{s=1}^{n} b_{si}\left(\frac{d}{dt}\right) M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) = \delta_{ij} \cdot D\left(\frac{d}{dt}\right). \tag{3}$$

Apliquemos ahora a la primera ecuación (1') (más exactamente a sus miembros primero y segundo) el operador $M_{1j}\left(\frac{d}{dt}\right)$, (o sea,

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 4.

realicemos una serie de derivaciones, multiplicaciones por un número y adiciones); apliquemos a la segunda ecuación el operador $M_{2j}\left(\frac{d}{dt}\right)$, etc. y sumémoslas. Entonces, sobre la base de (3), obtenemos

$$\sum_{s=1}^{n} M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) b_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) y_j = D\left(\frac{d}{dt}\right) y_j = \sum_{s=1}^{n} M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) f_s(t),$$

o sea,

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) y_j = \Phi_j(t) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

donde

$$\Phi_j(t) = \sum_{s=1}^{n} M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) f_s(t). \tag{4}$$

Observación 1. Si todas las $f_s(t) \equiv 0$ $(s = 1, \ldots, n)$, entonces $\Phi_j(t) \equiv 0$ y la ecuación diferenciál será la misma para todas las funciones $y_j(t)$:

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) y_j = 0.$$

EJEMPLO 1. Reducir a una sola ecuación el sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 &= \quad y_2. \end{aligned}$$

Escribamos este sistema en la forma

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{d}{dt}\right) y_1 + y_2 &= 0, \\ 0 + \left(1 - \frac{d}{dt}\right) y_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aquí $b_{11} = 1 - \frac{d}{dt}$, $b_{12} = 1$, $b_{21} = 0$, $b_{22} = 1 - \frac{d}{dt}$; $M_{11} = 1 - \frac{d}{dt}$, $M_{12} = 0$, $M_{21} = -1$, $M_{22} = 1 - \frac{d}{dt}$. Aplicando a la primera ecuación (5) el operador M_{11} y a la segunda, el operador M_{21} y sumándolos, obtenemos

$$\left(1 - \frac{d}{dt}\right)^2 y_1 + \left(1 - \frac{d}{dt}\right) y_2 - \left(1 - \frac{d}{dt}\right) y_2 = 0,$$

o sea,

$$\left(1 - \frac{d}{dt}\right)^2 y_1 = 0, \quad \ddot{y}_1 - 2\dot{y}_1 + y_1 = 0.$$

De un modo completamente análogo, aplicando a la primera ecuación (5) el operador $M_{12} = 0$ y a la segunda, el operador $M_{22} = 1 - \frac{d}{dt}$ y sumándolos, obtenemos

$$\left(1 - \frac{d}{dt}\right)^2 y_2 = 0.$$

Podemos obtener también esta ecuación diferencial con ayuda del otro método. Por ejemplo, derivando la segunda ecuación, tenemos

$$\ddot{y}_2 = \dot{y}_2.$$

Sustrayendo de esta ecuación la segunda ecuación del sistema, obtenemos

$$\ddot{y}_2 - 2\dot{y}_2 + y_2 = 0.$$

§ 1.23. Sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

o bien

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \tag{1'}$$

donde $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ es la función vectorial dada, continua en (a, b), a_{kl} son los números constantes dados y $A = \| a_{kl} \|$, se llama *sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes.*

La solución general del sistema (1) *es igual a la suma*

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k y^k(t) + y^0(t) \tag{2}$$

de una solución particular cualquiera de este $y^0(t)$ *y de la solución general* $\sum_{k=1}^{n} C_k y^k(t)$ *del sistema homogéneo correspondiente*

$$L[y] \equiv \frac{dy}{dt} - Ay = o. \tag{3}$$

En efecto, la suma (2) para cualesquiera constantes C_k es, evidentemente, la solución del sistema (1):

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} C_k y^k + y^0\right] = L[y^0] = f.$$

Por otro lado, si y es la solución del sistema (1), entonces

$$L[y - y^0] = L[y] - L[y^0] = f - f = o,$$

pero en este caso para ciertas constantes C_k

$$y - y^0 = \sum_{k=1}^{n} C_k y^k.$$

Si se conoce la solución general del sistema homogéneo (3), la solución particular del sistema no homogéneo (1) se puede encontrar por el método de *variación de las constantes arbitrarias* (*método de Lagrange* [1])).

Supongamos que

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k y^k(t)$$

es la solución general del sistema (3), o sea, $y^k(t)$ son las soluciones particulares linealmente independientes (3):

$$L[y^k] = o \ (k = 1, \ldots, n).$$

Consideremos $C_k = C_k(t)$ como funciones de t y escojámoslas de modo que la función

$$U(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, y^k(t) \tag{4}$$

sea la solución particular del sistema homogéneo (1). Derivando tenemos

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left[C_k(t) \frac{dy^k}{dt} + C_k'(t)\, y^k(t)\right].$$

Sustituyendo los valores de U y de $\frac{dU}{dt}$ en (1'), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \left[C_k(t) \frac{dy^k}{dt} + C_k'(t)\, y^k(t)\right] - \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, Ay^k = f(t),$$

[1]) L. Lagrange (1736—1813), ilustre físico y matemático francés.

o bien

$$\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, L[y^k] + \sum_{k=1}^{n} C_k'(t)\, y^k(t) = f(t).$$

Como $L[y^k] = o$, para definir $C_k'(t)$ obtenemos el sistema

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(t)\, y^k(t) = f(t) \tag{5}$$

con las funciones vectoriales $f(t)$ y $y^k(t)$ continuas en (a, b).

El sistema (5) es lineal respecto a $C_k'(t)$ con el determinante igual al de Wronski del sistema de los vectores $y^1, \ldots, y^n$. Puesto que este determinante no es igual a cero, el sistema (5) tiene una sola solución: $C_k'(t) = \varphi_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Las funciones $\varphi_k(t)$ son continuas, porque son continuas las funciones vectoriales $f(t)$ e $y^k(t)$.

Integrando, encontramos

$$C_k(t) = \int \varphi_k(t)\, dt \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Sustituyendo estos valores en (4), obtenemos la solución particular del sistema (1).

EJEMPLO 1. Resolver el sistema

$$\dot{y}_1 = y_1 + 2y_2 + e^t,$$
$$\dot{y}_2 = 2y_1 + y_2.$$

Es fácil comprobar que

$$y_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y_2 = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}$$

es la solución general del sistema homogéneo. Hallemos la solución particular del sistema no homogéneo con ayuda del método de Lagrange. Supongamos que $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$ son las funciones de t. Entonces

$$\dot{y}_1 = 3C_1(t)\, e^{3t} - C_2(t)\, e^{-t} + C_1'(t)\, e^{3t} + C_2'(t)\, e^{-t},$$
$$\dot{y}_2 = 3C_1(t)\, e^{3t} + C_2(t)\, e^{-t} + C_1'(t)\, e^{3t} - C_2'(t)\, e^{-t}.$$

Sustituyendo estos valores de las derivadas y las propias funciones en nuestro sistema, obtenemos

$$C_1'(t)\, e^{3t} + C_2'(t)\, e^{-t} = e^t,$$
$$C_1'(t)\, e^{3t} - C_2'(t)\, e^{-t} = 0.$$

El determinante del sistema dado es el de Wronski

$$W=\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2e^{2t} \neq 0.$$

Por eso el sistema es soluble:

$$C_1'(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}, \quad C_2'(t)=\frac{1}{2}e^{2t}.$$

Integrando, obtenemos

$$C_1(t)=-\frac{1}{4}e^{-2t}, \quad C_2(t)=\frac{1}{4}e^{2t}.$$

Ahora bien, la solución particular tiene la forma

$$y_1(t)=0, \quad y_2(t)=-\frac{1}{2}e^{t}.$$

La solución general se puede escribir en la forma

$$y_1(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}, \quad y_2(t)=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}.$$

En la forma vectorial (matricial) esto se escribe así:

$$y=C_1\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix}.$$

A continuación, en ejemplos, mostraremos como se puede hallar la solución particular del sistema (1) cuando $f_i(t) = b_i \exp(\lambda_i t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, donde b_i, λ_i son los números constantes dados.

La solución particular de un sistema no homogéneo lineal de ecuaciones con coeficientes constantes en el caso en que los segundos miembros $f_i(t)$ tienen la forma especial ($\exp(kt)$ o $t^m \exp(kt)$) puede encontrarse por analogía con la solución de una ecuación diferencial no homogénea.

EJEMPLO 2. Resolver el sistema

$$\frac{dx}{dt}=x+2y+e^{t},$$

$$\frac{dy}{dt}=2x+y+e^{3t}.$$

Resolvemos primeramente el sistema homogéneo. La ecuación caractorística

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

tiene las raíces $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo se escribirá en la forma

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}.$$

A los términos independientes del sistema $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{3t}$ les corresponden los números 1 y 3. El número 1 no es la raíz de la ecuación característica, mientras que 3 es su raíz de segundo orden de multiplicidad. Por analogía, al igual que para una sola ecuación, ponemos

$$\bar{x} = b_1 e^t + (b_2 + b_3 t) e^{3t},$$
$$\bar{y} = a_1 e^t + (a_2 + a_3 t) e^{3t}.$$

Sustituyendo estas funciones en nuestro sistema, encontramos

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 1/2;$$
$$a_1 = -1/2, \quad a_2 = 1/4, \quad a_3 = 1/2.$$

La solución general del sistema no homogéneo se escribirá así:

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2} e^{3t},$$
$$y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} e^t + \left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right) e^{3t}.$$

§ 1.24. Integración de ecuaciones diferenciales mediante series de potencias

En este párrafo se examinan dos ejemplos de resolución de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden mediante series de potencias. Ciertos polinomios son sus coeficientes.

El segundo ejemplo está dedicado a la ecuación de Bessel que es importante en las matemáticas y sus aplicaciones. Las soluciones de la ecuación de Bessel que forman su sistema fundamental de funciones no son funciones elementales. Sin embargo, como veremos, ellas se desarrollan en series de potencias cuyos coeficientes se calculan con bastante sencillez.

EJEMPLO 1. $y'' - xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

En el caso dado $p_0(x) = -x$, o sea, es el polinomio de primer grado respecto a x. Busquemos la solución en la forma de la serie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{1}$$

En virtud de la condición inicial $y(0) = 0$, obtenemos $a_0 = 0$. De la condición $y'(0) = 1$, tenemos $a_1 = 1$. Derivando formalmente la

serie dada dos veces término a término y sustituyéndola en la ecuación, obtenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k x^{k-2} = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{2}$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales de x en los miembros primero y segundo de (2), obtenemos:

$$a_2 = 0,\ 3\cdot 2a_3 = a_0,\ \text{de donde } a_3 = \frac{a_0}{2\cdot 3} = 0;$$

$$4\cdot 3a_4 = a_1,\ \text{de donde } a_4 = \frac{a_1}{3\cdot 4};$$

$$5\cdot 4a_5 = a_2,\ \text{de donde } a_5 = 0;$$

$$6\cdot 5a_6 = a_3,\ \text{de donde } a_6 = \frac{a_3}{5\cdot 6} = 0;$$

. . . . . .

$$n(n-1)\,a_n = a_{n-3},\ \text{de donde } a_n = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)};$$

. . . . . .

Puesto que tenemos $a_0 = a_2 = 0$, todos los coeficientes

$$a_{3k} = 0,\quad a_{3k+2} = 0.$$

Luego

$$a_{3k+1} = \frac{a_{3(k-1)+1}}{(3k+1)\,3k} = \ldots = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7 \ldots 3k\,(3k+1)}$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Así, pues,

$$y(x) = x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7 \ldots 3k\,(3k+1)} + \ldots. \tag{3}$$

Según el principio de D'Alembert el radio de convergencia de esta serie es igual a la infinidad. Por consiguiente, todas nuestras operaciones han sido válidas y la suma de la serie para todos los valores de x es la solución de la ecuación.

EJEMPLO 2. *Ecuación de Bessel* [1]):

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0. \tag{4}$$

Se reducen a esta ecuación muchos problemas de la física matemática.

---

[1]) F. W. Bessel (1784—1846), astrónomo alemán.

Busquemos la solución particular de (4) en la forma de una serie de potencias generalizada

$$y = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{5}$$

Derivando (5) dos veces término a término y sustituyendo en (4), obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\rho)^2 x^{k+\rho} + (x^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} [(k+\rho)^2 + x^2 - \nu^2] = 0.$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales de x, obtenemos

$$\left.\begin{array}{ll|l} x^{\rho} & a_0 (\rho^2 - \nu^2) & = 0, \\ x^{\rho+1} & a_1 [(\rho+1)^2 - \nu^2] & = 0, \\ x^{\rho+2} & a_2 [(\rho+2)^2 - \nu^2] + a_0 & = 0, \\ x^{\rho+3} & a_3 [(\rho+3)^2 - \nu^2] + a_1 & = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x^{\rho+p} & a_p [(\rho+p)^2 - \nu^2] + a_{p-2} & = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right\} \tag{6}$$

Supongamos que el coeficiente a_0 de potencia inferior de x es distinto de cero, entonces la primera ecuación en (6) ofrece el aspecto

$$\rho = \pm\nu.$$

Sea por ahora $\rho = \nu \geqslant 0$. Entonces de la segunda ecuación de (6) obtenemos $a_1 [(\nu+1)^2 - \nu^2] = 0$, o sea, $a_1 = 0$ y, por consiguiente todos los coeficientes provistos de números de orden impares asimismo son iguales a cero ($a_{2p+1} = 0$). Luego

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = -\dfrac{a_0}{(\nu+2)^2 - \nu^2} = -\dfrac{a_0}{2^2(\nu+1)}, \\ a_4 = -\dfrac{a_2}{(\nu+4)^2 - \nu^2} = \dfrac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)\,1\cdot 2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2p} = \dfrac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p!\,(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+p)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{7}$$

Cuando $\rho = -\nu$ (ν es un número no entero) del mismo modo obtenemos

$$a_{2p+1} = 0, \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p!\,(-\nu+1)(-\nu+2)\ldots(-\nu+p)}.$$

Ahora bien, para $\rho = \nu$ la solución de la ecuación (4) se escribirá así:

$$y = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+\nu}}{2^{2p} p! (\nu+1) \dots (\nu+p)}. \tag{8}$$

Introduzcamos para el examen la función

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx, \quad (p > 0),$$

que se llama *función gamma de Euler*. Es fácil comprobar que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ y que para los números enteros $p > 0$, $\Gamma(p+1) = p!$

Para los números negativos p, $\Gamma(p)$ se determina de otro modo; no obstante, la propiedad $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ se conserva.

Si se escoge un número constante arbitrario $a_0 = 1/(2^{\nu}\Gamma(\nu+1))$, la (8) se escribe

$$J_{\nu}(x) = y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (x/2)^{2p+\nu}}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)} \tag{9}$$

Cuando $\rho = -\nu$, escogiendo $a_0 = 1/(2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1))$, de un modo análogo obtenemos

$$J_{-\nu}(x) = y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (x/2)^{2p-\nu}}{\Gamma(p+1)\Gamma(p-\nu+1)}. \tag{10}$$

Las funciones $J_{\nu}(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ se llaman *funciones de Bessel de primer género de orden* ν y $-\nu$, respectivamente.

La serie (9) converge para todos los valores de x, mientras que la serie (10) $\forall\, x \neq 0$ y ambas permiten la derivación doble término a término. Por consiguiente, $J_{\nu}(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son las soluciones de la ecuación de Bessel (4).

Si ν no es un número entero, entonces las funciones $J_{\nu}(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes, ya que sus series comienzan con diferentes potencias de x y la combinación lineal

$$\alpha_1 J_{\nu}(x) + \alpha_2 J_{-\nu}(x) \equiv 0$$

solamente cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Por eso en este caso la solución general (4) tiene la forma

$$y = C_1 J_{\nu}(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Si $\nu = n$ es un número entero, se puede mostrar que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

o sea, estas funciones resultan linealmente dependientes ($\Gamma(p)$ para números enteros negativos p y $p = 0$ se convierte en infinito). Por eso por segunda solución linealmente independiente debe tomarse cualquier otra función. Generalmente se toma la función de Bessel de segundo género $Y_n(x)$. Esta función es cierta combinación de las funciones $J_m(x)$ y $J_{-m}(x)$:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}\nu\pi}$$

(ν es un número no entero y tiende hacia n).

Observación 1. Ahora bien, la solución general de la ecuación (4) para $\nu = n$ natural tiene la forma

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

donde C_1, C_2 son las constantes arbitrarias. Notemos que la función $Y_n(x)$ no está acotada en el entorno $x = 0$. Por ejemplo,

$$\pi Y_0(x) = 2J_0(x)\left[\ln\frac{x}{2} + C\right] - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m},$$

donde C es la constante de Euler ($C \approx 0{,}577$).

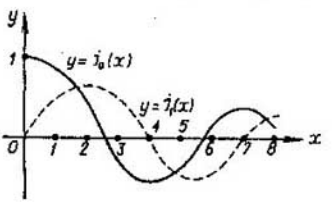

Fig. 16.

Por eso toda solución de la ecuación (4) acotada en el entorno de $x = 0$, tiene la forma $y = C_1 J_n(x)$, o sea, para ella $C_2 = 0$.

Los gráficos de las funciones de Bessel $J_0(x)$ (par) y $J_1(x)$ (impar) se muestran en la fig. 16.

§ 1.25. Elementos de la teoría de la estabilidad

En muchos casos es importante conocer *no sólo una solución concreta* del problema que responde a las condiciones iniciales dadas sino el carácter del comportamiento de la solución al variar las condiciones iniciales y al variar el argumento. Son las cuestiones de las cuales

se ocupa la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Una de las partes principales de esta última es la *teoría de la estabilidad de una solución* o bien la teoría de la estabilidad de un movimiento.

Supongamos que cierto fenómeno se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

con las condiciones iniciales

$$y_i(t_0) = y_{i0} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Las condiciones (2) son por regla general el resultado de una medición y, por lo tanto, han sido obtenidos con cierta precisión.

Si variaciones tan pequeñas como quiera de las condiciones iniciales son capaces de cambiar fuertemente una solución, entonces la solución del sistema (1) definida por los *inexactos* datos iniciales, escogidos por nosotros, no tiene ninguna importancia e incluso de un modo aproximado no puede describir el fenómeno.

Por eso es importante conocer las condiciones para las cuales una variación pequeña de las condiciones (2) provoca una variación pequeña de la solución del sistema (1).

Si t varía en un intervalo finito bastante pequeño $|t_0 - t| \leqslant T$, la respuesta a esta pregunta se puede encontrar sobre la base del teorema de existencia y de unicidad.

TEOREMA 1 (SOBRE LA DEPENDENCIA CONTINUA DE LA SOLUCION DE LAS CONDICIONES INICIALES). *Si el segundo miembro de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{3}$$

es continuo también respecto a la variable y tiene la derivada parcial acotada ($|f'_y| \leqslant N$) *en un rectángulo* $D = \{t_0 - a \leqslant t \leqslant t_0 + a,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$, *entonces la solución de la ecuación* (3) $y(t) = y(t, t_0, y_0)$, *que satisface la condición inicial* $y(t_0) = y_0$, *depende continuamente de los datos iniciales. Más exactamente, para todo valor de* $\varepsilon > 0$ *existe tal número* $\delta > 0$ *que si* $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$, *entonces*

$$|y(t, t_0, y_0) - y(t, t_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon$$

cuando

$$|t_0 - t| < T,\ T < T_0,\ T_0 = \min\left\{a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M}\right\},$$

$$M = \max_{(t, y) \in D} |f(t, y)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Al demostrar el teorema de existencia (§ 1.6) hemos obtenido que

$$y(t) = y(t, t_0, y_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\, dt,$$

$$\bar{y}(t) = y(t, t_0, \bar{y}_0) = \bar{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, \bar{y}(t))\, dt.$$

De aquí, aplicando el teorema de Lagrange (explicaciones siguen a continuación), obtenemos

$$|y(t) - \bar{y}(t)| \leqslant |y_0 - \bar{y}_0| + \int_{t_0}^{t} |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant |y_0 - \bar{y}_0| + N|t - t_0| \max_t |y(t) - \bar{y}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant |y_0 - \bar{y}_0| + NT \max_t |y(t) - \bar{y}(t)|.$$

Como $TN < 1$, entonces

$$(1 - TN)\,|y(t) - \bar{y}(t)| \leqslant |y_0 - \bar{y}_0|,$$

o bien

$$|y(t) - \bar{y}(t)| \leqslant |y_0 - \bar{y}_0|/(1 - TN).$$

Si ahora tomamos

$$|y_0 - \bar{y}_0| < \delta, \quad \text{donde} \quad \delta = \varepsilon(1 - TN),$$

entonces

$$|y(t) - \bar{y}(t)| < \varepsilon.$$

Hagamos algunas explicaciones. Tiene lugar la inecuación

$$|y(t, t_0, y_0) - y_0| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\, dt \right| \leqslant |t - t_0|\, M \leqslant TM,$$

donde $TM \leqslant T_0 M < b$ o bien $b - TM = \delta_0 > 0$ que muestra que la curva integral $y(t, t_0, y_0)$ para $|t - t_0| < T$ pertenece a un rectángulo que se halla estrictamente dentro del rectángulo D. De aquí se ve que la curva

$$y(t, t_0, \bar{y}_0), \quad |t - t_0| < T$$

tampoco sale fuera de los límites del rectángulo D si sólo

$$|\bar{y}_0 - y_0| < \delta_0.$$

Esto muestra que el teorema de Lagrange más arriba ha sido

aplicado en un modo argumentado, en todo caso cuando $\delta < \delta_0$, puesto que según la condición la función $f(t, y)$ tiene la derivada continua $\frac{\partial f}{\partial y}$ en D.

Semejante teorema es válido también para el sistema (1).

Si se cumplen todas las condiciones del teorema, se dice que el *problema ha sido planteado correctamente.*

Hemos estudiado la estabilidad de una solución en un segmento bastante pequeño de valores de t.

Sin embargo, si el argumento $t \in [t_0, \infty)$ puede tomar valores cualesquiera, entonces es la teoría de la estabilidad que examina si la solución depende o no de los datos iniciales.

DEFINICIÓN. Supongamos que $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ es la solución del sistema (1). La solución $\varphi(t)$ del sistema (1) se llama

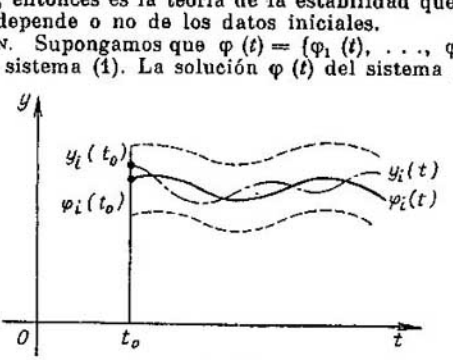

Fig. 17.

estable según Liapunov [1]) si para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para una solución cualquiera $y(t) = \{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ del mismo sistema, cuyas condiciones iniciales satisfacen las inecuaciones

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

sean válidas las inecuaciones

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \forall t \in [t_0, \infty). \tag{5}$$

Ahora bien, la solución $\varphi(t)$ es estable según Liapunov si las soluciones próximas a ella en cuanto a las condiciones iniciales permanecen próximas también para todos los valores de $t \geqslant t_0$ (fig. 17).

Si la solución $\varphi(t)$ es estable según Liapunov y, además,

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

ella se llama *estable asintóticamente.*

Notemos que de (6) no se deriva la estabilidad según Liapunov.

[1]) A. M. Liapunov (1857—1918), ilustre matemático y mecánico ruso.

EJEMPLO 1. $\frac{dy}{dx} = -y, \quad y(x_0) = y_0.$

La solución general de esta ecuación $y = C \exp(-x)$. La solución que satisface la condición inicial tiene la forma

$$y = y_0 \exp(x_0 - x).$$

Si ahora imponemos otra condición inicial $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$, la solución será

$$\bar{y} = \bar{y}_0 \exp(x_0 - x).$$

De aquí

$$|y - \bar{y}| = |y_0 - \bar{y}_0| \exp(x_0 - x) \leqslant |y_0 - \bar{y}_0|$$

para todos los valores de $x \geqslant x_0$. Por eso si $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta = \varepsilon$, entonces $|y - \bar{y}| \leqslant \varepsilon$, o sea, la solución $y = y_0 \exp(x_0 - x)$ es estable según Liapunov cuando $x \geqslant x_0$. Esta solución es también estable asintóticamente, ya que

$$\lim_{x \to +\infty} |y - \bar{y}| = \lim_{x \to +\infty} |y_0 - \bar{y}_0| \exp(x_0 - x) = 0.$$

EJEMPLO 2. Análogamente, para la ecuación $y' = y$ se puede mostrar que

$$|y - \bar{y}| = |y_0 - \bar{y}_0| \exp(x - x_0)$$

para $x \geqslant x_0$ si x_0 tiene un valor cualquiera.

Es evidente que, cualquiera que sea el valor de x_0 cuando $x \geqslant x_0$, la solución y es inestable, ya que el factor $\exp(x - x_0) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$.

La investigación de la estabilidad según Liapunov de la solución arbitraria $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ del sistema (1) se puede reducir a la investigación de la estabilidad de la solución trivial (idénticamente igual a cero) de otro sistema cualquiera. Para eso es necesario pasar a las nuevas funciones incógnitas

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

De aquí

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt}.$$

Por eso el sistema (1) pasa al sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i[t, x_1 + \varphi_1(t), \ldots, x_n + \varphi_n(t)] - f_i[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)] \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

El sistema (8) tiene la solución trivial

$$x_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

De lo dicho se deriva el teorema siguiente.

TEOREMA 2. *La solución* $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ *del sistema* (1) *es estable según Liapunov (es estable asintóticamente) si y sólo si es estable según Liapunov (es estable asintóticamente) la solución trivial (punto de reposo) del sistema* (8).

Esta solución posee la propiedad consistente en que el punto $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ en realidad permanece inmóvil al variar t, es decir, queda en el lugar. En este caso la misma solución (9) y el punto $(0, \ldots, 0)$ se llaman *posición de equilibrio del sistema* (1) o bien *punto de reposo*.

Las condiciones de estabilidad, en cuanto al punto de reposo $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, se pueden enunciar así: el punto de reposo $x_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ del sistema (8) es estable según Liapunov si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que de la inecuación

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

resulta

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n), \ \forall t \geqslant t_0,$$

o sea, una trayectoria, cuyo punto inicial se encuentra en cierto δ-entorno del origen de coordenadas, para $t \geqslant t_0$ no sale fuera de los límites de un ε-entorno arbitrario del origen de coordenadas. Aquí hablamos de entornos rectangulares, pero se puede pasar a los esféricos lo cual es cómodo sobre todo para la forma vectorial de notación de la solución $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$:

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \ \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Observación 1. La solución particular arbitraria $y_0(t)$ del sistema no homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t) \tag{10}$$

(véase § 1.23, (1')) es estable según Liapunov (es estable asintóticamente) si y sólo si es estable según Liapunov (estable asintóticamente) el punto de reposo del sistema homogéneo correspondiente (véase el teorema 2)

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{11}$$

En efecto, el sistema (10) es un caso particular del sistema (1) y el sistema (11) es un caso particular del sistema (8). Aquí los términos independientes han desaparecido, ya que la función $f(t)$ depende solamente de t y no depende de las funciones buscadas.

TEOREMA 3 (DE LIAPUNOV). *Supongamos que se da el sistema*

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\ \ (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

que tiene la solución trivial $y_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Admitamos que existe la función derivable $v(y_1, \ldots, y_n)$ *que satisface las condiciones*:

1) $v(y_1, \ldots, y_n) \geqslant 0$ *y* $v = 0$ *sólo cuando* $y_1 = \ldots = y_n = 0$, *o sea, la función* v *tiene el mínimo riguroso en el origen de coordenadas.*

2) *La derivada total de la función* v *a lo largo de la trayectoria de fases (o sea, a lo largo de la solución* $y_i(t)$ *del sistema (1))*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \leqslant 0 \ \text{ para } t \geqslant t_0.$$

Entonces el punto de reposo $y_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *es estable según Liapunov.*

Si se exige adicionalmente que fuera de un entorno tan pequeño como e quiera del origen de coordenadas $(y_1^2 + \ldots + y_n^2 \geqslant \delta)$

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0, \quad (t \geqslant t_0),$$

donde β *es una magnitud constante, entonces el punto de reposo* $y_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *es asintóticamente estable.*

La función v *se llama función de Liapunov.*

EJEMPLO 1.

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1^5 - y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2^3.$$

Es fácil ver que el punto de reposo $y_1 = y_2 \equiv 0$ es la solución del sistema dado. Aclaremos si es estable o no este punto.

Examinemos la función $v(y_1,\ y_2) = y_1^2 + y_2^2$. Ella satisface todas las condiciones del teorema:

1) $v(y_1,\ y_2) \geqslant 0$ y $v = 0$ sólo cuando $y_1 = y_2 = 0$

2) A lo largo de la trayectoria de fases

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt} = 2y_1(-y_1^5 - y_2) + 2y_2(y_1 - y_2^3) =$$

$$= -2(y_1^6 + y_2^4) \leqslant 0.$$

Además, fuera del entorno del origen de coordenadas $(y_1^2 + y_2^2 \geqslant \geqslant \delta > 0)$

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0$$

(donde β es el mínimo de la función $2(y_1^4 + y_2^4)$ fuera del círculo $y_1^2 + y_2^2 = \delta$).

Por lo tanto, la solución $y_1 = y_2 \equiv 0$ es asintóticamente estable.

Observación 2. Se recomienda buscar la función de Liapunov en la forma cuadrática de los argumentos $y_1, \ldots, y_n$, o sea,

$$v = \sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j.$$

La primera exigencia trata de que v debe ser una forma cuadrática definida positiva. La manera de escoger los coeficientes a_{ij} para que la forma v sea definida positiva, se señala en el teorema de Sylvester [1])

$$\left(a_{11} > 0 \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right| > 0, \ \ldots, \left|\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right| > 0\right).$$

§ 1.26. Clasificación de los puntos de reposo

La investigación de la estabilidad del sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

se puede realizar sobre la base del teorema de Liapunov. Sin embargo, el sistema (1) puede ser investigado en cuanto a su estabilidad también directamente, ya que podemos resolverlo.

Supongamos que el determinante

$$\Delta = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right| \neq 0. \tag{2}$$

Es fácil ver que $y(t) = x(t) \equiv 0$ es ra solución del sistema (1) con las condiciones iniciales nulas.

Para hallar la solución general debemos encontrar las raíces de la ecuación característica

$$\left|\begin{matrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{matrix}\right| = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0, \tag{3}$$

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 22. J. J. Sylvester (1814—1897), matemático inglés.

De la condición $\Delta \neq 0$ resulta que $\lambda = 0$ no es una raíz de la ecuación característica (3).

1. Supongamos que las raíces de la ecuación característica λ_1 y λ_2 son reales y diferentes. Luego, supongamos que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ son los vectores propios de la matriz A que responden a las raíces λ_1 y λ_2, respectivamente, o sea,

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_1)\alpha_1+a_{12}\alpha_2=0,\\ a_{22}\alpha_1+(a_{22}-\lambda_1)\alpha_2=0,\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_2)\beta_1+a_{12}\beta_2=0,\\ a_{21}\beta_1+(a_{22}-\lambda_2)\beta_2=0.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Entonces, como sabemos, la solución general del sistema (1) tiene la forma

$$\left.\begin{aligned}x=C_1\alpha_1e^{\lambda_1 t}+C_2\beta_1e^{\lambda_2 t},\\ y=C_1\alpha_2e^{\lambda_1 t}+C_2\beta_2e^{\lambda_2 t},\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

donde C_1 y C_2 son las constantes arbitrarias.

Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, entonces de (5) se ve que el punto de reposo $x = y \equiv 0$ es asintóticamente estable.

En efecto, consideremos, por ejemplo, que $t_0 = 0$, entonces la solución (5) que pasa por el punto (x_0, y_0) en el instante de tiempo t_0 se determina por las constantes C_1 y C_2 que se hallan a partir de las ecuaciones

$$\begin{aligned}x_0 &= C_1\alpha_1 + C_2\beta_1,\\ y_0 &= C_1\alpha_2 + C_2\beta_2,\end{aligned}$$

donde $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Pero entonces

$$C_1 = Ax_0 + By_0, \quad C_2 = Dx_0 + Ey_0,$$

donde A, B, C, D, E son ciertas constantes. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leqslant |Ax_0 + By_0|\,|\alpha_1| + |Dx_0 + Ey_0|\,|\beta_1|,\\ |y(t)| &\leqslant |Ax_0 + By_0|\cdot|\alpha_2| + |Dx_0 + Ey_0|\cdot|\beta_2|,\end{aligned}$$

porque $|e^{\lambda_1 t}| \leqslant 1$, $|e^{\lambda_2 t}| \leqslant 1$ cuando $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$.

De aquí resulta que para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que tan pronto como $|x_0|$, $|y_0| < \delta$, se cumplen las inecuaciones

$$|x(t)|,\ |y(t)| < \varepsilon, \quad (t > 0),$$

o sea, el punto (0, 0) es estable según Liapunov. Además, en virtud de que

$$\exp(\lambda_i t) \to 0, \quad (t \to +\infty),$$

de (5) se deduce, evidentemente, que el punto (0, 0) es asintóticamente estable.

Si eliminamos el argumento t del sistema (5), la función obtenida $y = \varphi(x)$ ofrece la trayectoria de movimiento en el sistema xOy.

El punto material que se encuentra en el instante inicial de tiempo $t = t_0$ en el δ-entorno del origen de coordenadas pasa, cuando t llega a ser suficientemente grande, al punto que se halla en el ε-entorno del origen de coordenadas y, cuando $t \to +\infty$, tiende hacia el origen de coordenadas.

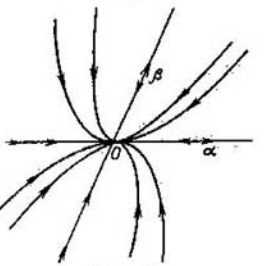

Fig. 18.

Tal punto de reposo se llama *nudo estable* (fig. 18).

En la fig. 18 se muestra la situación de las trayectorias correspondientes al caso dado. Las flechas señalan el sentido de movimiento del punto por la trayectoria cuando $t \to +\infty$. Todas las trayectorias, a excepción de una, en el punto (0, 0) tienen una tangente común. Si suponemos que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, la pendiente de la tangente es igual a α_2/α_1.

En efecto, de (5) tenemos ($C_1 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}(C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}) + a_{22}(C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t})}{a_{11}(C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}) + a_{12}(C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t})} =$$

$$= \frac{a_{21}(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) + a_{22}(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})}{a_{11}(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) + a_{12}(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})} \to$$

$$\xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{a_{21}C_1\alpha_1 + a_{22}C_1\alpha_2}{a_{11}C_1\alpha_1 + a_{12}C_1\alpha_2} = \frac{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2}{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2} = \frac{\lambda_1\alpha_2}{\lambda_1\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

si $\alpha_1 \neq 0$, ya que en virtud de (4)

$$a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = \lambda_1\alpha_2, \quad a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1.$$

Si $\alpha_1 = 0$, entonces, razonando del mismo modo, obtenemos

$$\frac{dx}{dy} \to \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0 \ (\lambda_1 \neq 0\ 1).$$

Si $C_1 = 0$, de (5) obtenemos la trayectoria

$$y = \frac{\beta_2}{\beta_1}x.$$

La tangente a esta trayectoria (recta) tiene la pendiente β_2/β_1.

Ahora bien, la tangente a las trayectorias en las cuales $C_1 \neq 0$, es paralela al vector propio $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ que responde al número

propio λ_1 mínimo por su valor absoluto (cuando $\alpha_1 = 0$ este vector está orientado por el eje y).

Además, hay una trayectoria (para $C_1 = 0$), a saber, la recta $y = \frac{\beta_2}{\beta_1} x$ la cual es paralela al segundo vector propio $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ que responde al número propio λ_2 máximo por su módulo).

Si ahora $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, entonces de (5) se desprende que el punto de reposo $x = y \equiv 0$ es inestable, ya que $\exp(\lambda_i t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Tal punto de reposo se llama *nudo inestable*.

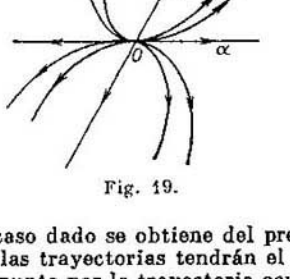

Fig. 19.

Fig. 20.

El caso dado se obtiene del precedente sustituyendo t por $(-t)$. Por eso las trayectorias tendrán el aspecto anterior, pero el movimiento del punto por la trayectoria ocurrirá en el sentido contrario (fig. 19).

Por último, si el número $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$ (o bien, al revés, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$), el punto de reposo es asimismo inestable, ya que $\exp(\lambda_2 t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Los puntos que se encuentran en el δ-entorno del origen de coordenadas por la trayectoria

$$x = C_2\beta_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = C_2\beta_2 e^{\lambda_1 t}$$

se van al infinito. Notemos que en el caso dado hay una trayectoria por la cual el movimiento del punto se realiza en el sentido del origen de coordenadas cuando $t \to +\infty$:

$$x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Es la recta $\alpha_1 y - \alpha_2 x = 0$.

El punto de reposo de este tipo se llama *ensilladura* (fig. 20).

2. Supongamos que las raíces λ_1 y λ_2 son complejas (a_{kl} son reales!)

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq \quad (q \neq 0).$$

La solución general del sistema (1) se puede escribir en la forma de (5), donde los vectores α y $\beta = \bar{\alpha}$ ya tienen las coordenadas complejas.

Las partes real e imaginaria de esta solución también son la solución del sistema. Por eso la solución general del sistema (1) se puede escribir en forma de la combinación lineal de estas soluciones:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{pt}\,(C_1 \cos qt + C_2 \operatorname{sen} qt), \\ y &= e^{pt}\,(a \cos qt + b \operatorname{sen} qt), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

donde C_1 y C_2 son las constantes arbitrarias y a, b son ciertas combinaciones lineales de estas constantes.

$$(a = kC_1 + lC_2,\quad b = mC_1 + nC_2).$$

Vamos a ilustrar este hecho citando un ejemplo concreto.

EJEMPLO 1. Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o bien} \quad \lambda^2 + 1 = 0$$

tiene las raíces $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Las coordenadas de los vectores α y β se obtienen de las igualdades

$$(1 - i)\,\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad (1 + i)\,\beta_1 - \beta_2 = 0,$$

o sea, se puede poner $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1 - i$; $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1 + i$. Entonces

$$x = \alpha_1 e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \quad y = \alpha_2 e^{it} = (1 - i)\,(\cos t + i \operatorname{sen} t) = \\ = (\cos t + \operatorname{sen} t) + i\,(\operatorname{sen} t - \cos t)$$

es la solución del sistema.

Las partes real e imaginaria de esta solución son asimismo las soluciones del sistema, además, son soluciones linealmente independientes. Por eso su combinación lineal ofrece la solución general de nuestro sistema:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t, \quad y = C_1\,(\cos t + \operatorname{sen} t) + \\ + C_2\,(\operatorname{sen} t - \cos t) = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \operatorname{sen} t.$$

Ahora bien, en el caso dado

$$a = C_1 - C_2, \quad b = C_1 + C_2.$$

Cuando $p = 0$, las trayectorias de (6) para diferentes C_1, C_2, en virtud de la periodicidad de los factores entre paréntesis, son curvas cerradas, o sea, elipses que tienen por centro el punto (0; 0) (fig. 21).

Este punto se llama *centro*. Cuando $p = 0$, falta la estabilidad asintótica, o sea, el punto $(x(t), y(t))$ se mueve por una de las elipses de la familia indicada, recorriéndola un número infinito de veces. Evidentemente, este punto no tiende hacia ningún límite cuando $t \to +\infty$. Por otro lado, cuando $p = 0$, el punto de reposo (0, 0) es estable según Liapunov. Vamos a comprobar esta afirmación citando el ejemplo anteriormente examinado. Hallemos la solución del sistema examinado en el ejemplo 1 la cual pasa en el instante de tiempo $t_0 = 0$ por el punto x_0, y_0. Es evidente que

$$x_0 = C_1, \quad y_0 = C_1 - C_2,$$

por consiguiente,

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = x_0 - y_0$$

y la solución tiene la forma

$$x(t) = x_0 \cos t + (x_0 - y_0) \operatorname{sen} t,$$
$$y(t) = y_0 \cos t + (2x_0 - y_0) \operatorname{sen} t.$$

Luego tenemos

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + |x_0| + |y_0| = 2|x_0| + |y_0|,$$
$$|y(t)| \leqslant |y_0| + 2|x_0| + |y_0| = 2|x_0| + 2|y_0|.$$

Asignemos $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \varepsilon/4$. Entonces, evidentemente, si $|x_0|, |y_0| < \delta$, para todos los valores de t

$$|x(t)| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

$$|y(t)| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Hemos demostrado la estabilidad del punto de reposo según Liapunov.

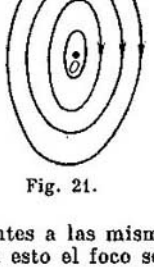

Fig. 21.

De (6) se desprende que para $p < 0$ el punto (x, y), cuando $t \to +\infty$, tiende hacia el punto nulo $x = 0, y = 0$ llamado *foco estable*. La presencia del factor $\exp(pt) \to 0$ $(t \to +\infty)$ transforma las curvas cerradas en espirales que se aproximan asintóticamente, cuando $t \to +\infty$, al origen de coordenadas (fig. 22).

Los puntos que se encuentran para $t = t_0$ en un δ-entorno arbitrario del origen de coordenadas van a parar en el ε-entorno dado del punto (0, 0), cuando t es suficientemente grande.

Las trayectorias que tienden hacia el foco poseen la propiedad consistente en que las tangentes a las mismas cuando $t \to +\infty$ no tienden a ningún límite. En esto el foco se distingue del nudo.

En el caso de que $p < 0$, el punto $x = y = 0$ es asintóticamente estable.

Si la parte real p de las raíces λ_1 y λ_2 es positiva, este caso pasa al precedente cuando t es sustituido por $(-t)$. Por consiguiente, las trayectorias conservan la forma representada en la fig. 22, con la

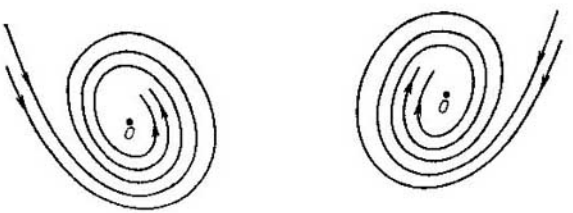

Fig. 22.

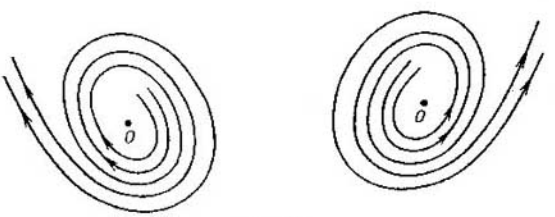

Fig. 23.

particularidad de que el movimiento del punto se realizará en el sentido contrario. Ya que $\exp(pt) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$, entonces los puntos que en el instante de tiempo inicial se encontraban en el entorno del origen de coordenadas, luego tienden al infinito. Tal punto de reposo lleva el nombre de *foco inestable* (fig. 23).

3. Supongamos que las raíces λ_1 y λ_2 son iguales entre sí ($\lambda_1 = \lambda_2$, ia_{kl} es real). Entonces ellas son reales y la solución general del sistema (1) adquiere el aspecto

$$\left.\begin{aligned} x &= (A + Bt)\, e^{\lambda_1 t}, \\ y &= (C + Dt)\, e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

donde A, B, C, y D son las constantes relacionadas entre sí por dos ecuaciones lineales que se pueden obtener si las funciones x e y se sustituyen en el sistema y éste se simplifica eliminando el factor $\exp(\lambda_1 t)$.

Si $\lambda_1 < 0$, entonces $\exp(\lambda_1 t) \to 0$, $t \exp(\lambda_1 t) \to 0$ para $t \to +\infty$ y, por consiguiente, el punto de reposo $x = 0$, $y = 0$ es asintóticamente estable. Se llama *nudo estable* (al igual que en el subpárr. 1).

Si $\lambda_1 > 0$, el punto $x = 0$, $y = 0$ es inestable y se llama *nudo inestable*.

Observación 1. Si $\Delta = 0$, la ecuación característica (3) tiene la raíz $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$.

Sea $\lambda_2 \neq 0$. Entonces la solución general del sistema (1) se escribirá así:

$$x = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t},$$

donde C_1 y C_2 son las constantes arbitrarias y $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0$, $-a_{22}\beta_1 + a_{12}\beta_2 = 0$.

Eliminando el parámetro t, obtenemos una familia de rectas paralelas

$$y - C_1\alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1}(x - C_1\alpha_1).$$

Si $\lambda_2 < 0$, entonces, cuando $t \to +\infty$, en cada trayectoria (en uno de los rayos paralelos) los puntos se aproximan al punto de reposo que se halla sobre esta trayectoria $x = C_1\alpha_1$, $y = C_1\alpha_2 \left(y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x\right)$ (fig. 24).

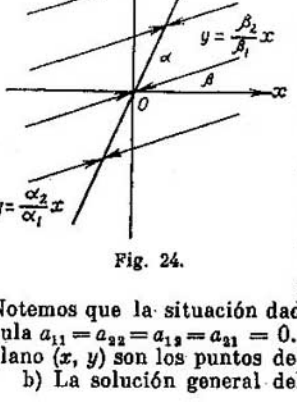

Fig. 24.

El punto (0, 0), al igual que todo punto de la recta $y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x$, para $\lambda_2 < 0$ es estable según Liapunov, pero no es asintóticamente estable.

Si $\lambda_2 > 0$, el punto de reposo es inestable.

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ se puede haber dos casos:

a) La solución general del sistema (1) tiene la forma $x = C_1$, $y = C_2$. En este caso el punto de reposo $x = y \equiv 0$ es estable según Liapunov, mas no es asintóticamente estable. Notemos que la situación dada tiene lugar cuando la matriz A es nula $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0$. En el caso dado todos los puntos del plano (x, y) son los puntos de reposo estables según Liapunov.

b) La solución general del sistema (1) tiene la forma

$$x = C_1 + C_2 t, \quad y = a + bt.$$

El punto de reposo $x = y \equiv 0$ es inestable.

En este caso $a_{22} = -a_{11}$, $a_{12} \cdot a_{21} \leqslant 0$.

EJEMPLO 2. Aclarar el carácter del punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -x + ay,$$
$$\dot{y} = -2y.$$

Planteemos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & a \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sus raíces son: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Por lo tanto, el punto de reposo $x = y \equiv 0$ es un nudo estable.

EJEMPLO 3. ¿Qué tipo del punto de reposo tiene el sistema

$$\dot{x} = x - y,$$
$$\dot{y} = 2x + 3y?$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tiene las raíces complejas $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$. La parte real de estas raíces conjugadas es positiva, por eso el punto de reposo $x = y \equiv 0$ es un foco inestable.

Observación 2. Si la matriz A es simétrica, entonces, como sabemos, la ecuación característica tiene solamente raíces reales [1]). Además, sabemos que

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

Puesto que una matriz simétrica engendra la forma cuadrática del tipo elíptico, hiperbólico y parabólico, en este caso llamaremos al sistema de ecuaciones diferenciales (1)

$$\textit{elíptico}, \text{ si } a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 > 0,$$
$$\textit{hiperbólico}, \text{ si } a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 < 0,$$
$$\textit{parabólico}, \text{ si } a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

De lo expuesto queda claro que si el sistema (1) es elíptico, el punto de reposo será un nudo estable si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Esto es posible cuando $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$.

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 24.

Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, el punto de reposo será un nudo inestable ($a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$).

Notemos que en el caso elíptico los números a_{11} y a_{22} son de un mismo signo.

Si el sistema (1) es hiperbólico ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$), el punto de reposo es siempre inestable (ensilladura).

Si el sistema (1) es parabólico, el punto de reposo es estable cuando $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} \leqslant 0$ e inestable cuando $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} > 0$.

EJEMPLO 4. Investigar el carácter del punto de reposo de los sistemas:

$$\text{a)}\ \begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = 2x - 5y; \end{cases} \quad \text{b)}\ \begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases} \quad \text{c)}\ \begin{cases} \dot{x} = x + \sqrt{3}y, \\ \dot{y} = \sqrt{3}x + 3y. \end{cases}$$

En todos estos ejemplos la matriz A es simétrica.

El sistema a) es elíptico, porque $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 11 > 0$. Puesto que $a_{11} = -3 < 0$, $a_{22} = -5 < 0$, el punto de reposo es un nudo estable.

El sistema b) es hiperbólico, ya que $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -1 < 0$. El punto de reposo es una ensilladura.

El sistema c) es parabólico, porque $a_{11}a_{22} - a_{12} = 0$. Ya que $a_{11} + a_{22} = 4 > 0$, el punto de reposo es inestable.

Observación 3. Se puede demostrar (al igual que lo hemos hecho para $n = 2$) que el punto de reposo es a ciencia cierta estable según Liapunov (es estable asintóticamente) en caso de un sistema homogéneo lineal de $n \geqslant 1$ ecuaciones de coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dt} = Ay,$$

si todas las raíces de la ecuación característica del sistema tienen las partes reales negativas.

Capítulo 2

Integrales múltiples

§ 2.1. Introducción

Supongamos que en el espacio tridimensional en el cual está definido el sistema rectangular de coordenadas (x, y, z) se da la superficie continua

$$z = f(Q) = f(x, y) \quad (Q = (x, y) \in \Omega),$$

donde Ω es un conjunto acotado (bidimensional) para el cual es posible definir el concepto de su área (medida bidimensional, véase a continuación el § 2.2). Como Ω podemos tomar un círculo, un rectángulo, una elipse, etc. Supongamos que la función $f(x, y)$ es positiva y planteemos el problema siguiente: es necesario determinar el volumen de un cuerpo acotado superiormente por nuestra superficie, inferiormente por el plano $z = 0$, y a la izquierda y a la derecha por una superficie cilíndrica que pasa por la frontera γ del conjunto plano Ω y cuya generatriz es paralela al eje z.

Es natural que el volumen buscado se determina del modo siguiente. Dividamos Ω en un número finito de partes

$$\Omega_1, \ldots, \Omega_N, \tag{1}$$

que no se recubren entre sí a no ser por sus fronteras. Sin embargo, estas partes deben ser tales que se puedan determinar sus áreas (medidas bidimensionales) que designemos por $m\Omega_1, \ldots, m\Omega_N$, respectivamente.

Introduzcamos el concepto de *diámetro* del conjunto A: es la superior exacta $d(A) = \sup_{P', P'' \in A} |P' - P''|$.

Escojamos en cada parte Ω_j un punto arbitratio $Q_j = (\xi_j, \eta_j)$ $j = 1, \ldots, N)$ y compongamos la suma

$$V_N = \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j \tag{2}$$

que es natural considerar como expresión aproximada del volumen buscado V. Conviene suponer que la aproximación $V \approx V_N$ será tanto más exacta cuanto menores sean los diámetros $d(\Omega_j)$ de las partes Ω_j. Por eso es natural determinar el *volumen* de nuestro cuerpo como el límite de la suma (2)

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j \tag{3}$$

cuando el diámetro máximo de los conjuntos parciales de partición (1) tiende hacia cero, si, desde luego, este límite existe y es igual a un

mismo número, cualquiera que sea el método de partición sucesiva de Ω.

Es posible abstraerse del problema de determinación del volumen del cuerpo y considerar la expresión (3) como cierta operación que se realiza sobre la función f definida sobre Ω. Esta operación se llama *operación de integración doble, según Riemann* [1], *de la función f sobre el conjunto* Ω y sus resultados, *integral doble definida* (*de Riemann de f sobre* Ω la cual se designa así:

$$V = \lim_{\text{máx } d(\Omega_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j = \iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\Omega} f(Q)\, dQ = \int_{\Omega} f\, d\Omega.$$

Supongamos ahora que en un espacio tridimensional donde está definido el sistema rectangular de coordenadas (x, y, z) se da un cuerpo Ω (conjunto) con una masa no uniformemente distribuida en éste siendo la densidad de distribución $\mu(x, y, z) = \mu(Q)$ $(Q = (x, y, z) \in \Omega)$. Es necesario determinar la masa total del cuerpo Ω. Para resolver este problema es natural dividir Ω en partes $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ cuyos volúmenes (medidas tridimensionales) (partiendo de la hipótesis de que existen) sean $m\Omega_1, \ldots, m\Omega_N$, escoger arbitrariamente en cada parte un punto $(Q_j = (x_j, y_j, z_j) \in \Omega_j)$ y considerar que la masa buscada es igual a

$$M = \lim_{\text{máx } d(\Omega_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} \mu(Q_j)\, m\Omega_j. \tag{4}$$

Al igual que antes, la expresión (4) se puede considerar como una operación determinada sobre la función μ asignada ahora en el conjunto tridimensional Ω. Esta vez la operación se llama *operación de integración triple* (*según Riemann*) y su resultado, *integral triple definida* (*de Riemann*) la cual se designa así:

$$M = \lim_{\text{máx } d(\Omega_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} \mu(Q_j)\, m\Omega_j = \int_{\Omega} \mu(Q)\, dQ = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

De un modo análogo se define el concepto de *integral de Riemann múltiple de n*.

[1] B. Riemann (1826—1866), gran matemático alemán.

Veremos que una parte de la teoría de integración múltiple que contiene los teoremas de existencia y los de propiedades aditivas de una integral puede ser expuesta de un modo absolutamente análogo tanto en el caso unidimensional como en el *n-dimensional*. No obstante en la teoría de integrales múltiples surgen dificultades que no existían cuando exponíamos la teoría de integrales simples.

El hecho consiste en que hemos definido la integral simple de Riemann para un conjunto muy simple, o sea, para el segmento $[a, b]$ que volvía a partirse en otros segmentos. No surgían ningunas dificultades para determinar la longitud (*medida unidimensional*) de los segmentos. Sin embargo, en el caso de las integrales dobles y, en general, en el caso de las integrales múltiples de n, la región de integración Ω ha de dividirse en partes con fronteras curvilíneas y entonces surge la cuestión acerca de la definición general del concepto de área o, en general, de medida de n dimensiones de estas partes.

En el caso bidimensional tenemos que vernos con regiones acotadas que poseen una *frontera suave* (fig. 25) o bien una *frontera*

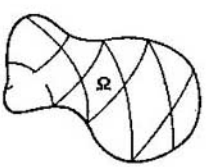

Fig. 25.

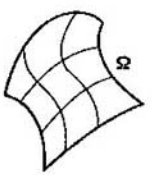

Fig. 26.

suave a trozos (fig. 26), o sea, que se compone de un número finito de trozos (líneas) suaves.

A su vez, tenemos que dividir estas regiones en partes que poseen una *frontera suave a trozos*.

A cada una de las regiones ω y a algunos otros conjuntos puede hacérseles corresponder un número positivo $m\omega$ llamado *área* o *medida bidimensional de Jordan* [1] (la definición general de la medida bidimensional de Jordan se da en el § 2.2).

Con ello se cumplen las propiedades siguientes:

1) Si Δ es un triángulo con la base a y la altura b, entonces $m\Delta = |\Delta| = ab$.

2) Si $\omega_1 \subset \omega_2$ y ω_1, ω_2 tienen las medidas $m\omega_1$, $m\omega_2$, entonces $m\omega_1 \leqslant m\omega_2$.

[1] C. Jordan (1838—1922), matemático francés.

3) Si la región ω está cortada con ayuda de una curva suave a trozos en dos partes ω_1 y ω_2 ($\omega = \omega_1 + \omega_2$), entonces

$$m\omega = m\omega_1 + m\omega_2.$$

Existen conjuntos de medida bidimensional cero tales como el punto, segmento, curva suave o suave a trozos.

En el caso tridimensional nos interesarán las regiones que tienen en calidad de frontera de ésta superficies suaves a trozos. En cuanto a tales regiones diremos que ellas tienen una frontera suave a trozos. La esfera, elipsoide y cubo pueden servir de ejemplos de tales regiones.

Una superficie se llama *suave* si en todo punto suyo se puede trazar a ella un plano tangente que varía continuamente junto con este punto. Una superficie se llama *suave a trozos* si puede ser cortada en un número finito de trozos suaves. En las líneas de corte los planos tangentes pueden no existir.

Para las regiones acotadas tridimensionales ω con fronteras suaves a trozos puede ser determinado su volumen (medida tridimensional), o sea, el número positivo $m\omega$ que satisface las propiedades siguientes:

1) Si Δ es un paralelepípedo rectangular con aristas a, b, c, entonces $m\Delta = |\Delta| = abc$.

2) Si $\omega_1 \subset \omega_2$ y ω_1, ω_2 tienen las medidas $m\omega_1$, $m\omega_2$, entonces $m\omega_1 \leqslant m\omega_2$.

3) Si la región ω está cortada por una superficie suave a trozos en partes ω_1 y ω_2 ($\omega = \omega_1 + \omega_2$), entonces $m\omega = m\omega_1 + m\omega_2$.

Existen conjuntos de medida tridimensional cero. Tales conjuntos son el punto, segmento, rectángulo (plano), superficie suave o suave a trozos.

Por analogía, se pueden examinar las regiones n-dimensionales ω ($\omega \subset R_n$) con fronteras suaves a trozos y para ellas definir la medida de n dimensiones, o sea, $m\omega > 0$, que posee propiedades semejantes a 1), 2), 3).

El rectángulo Δ en R_n se define como el conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades

$$a_j \leqslant x_j \leqslant b_j \quad (j = 1, \ldots, n;\ a_j < b_j).$$

La medida (n-dimensional) de Δ se define como el producto:

$$m\Delta = |\Delta| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n).$$

La superficie suave $S \subset R_n$ se define como el conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que satisfacen la ecuación

$$x_j = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$
$$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \overline{g},$$

donde j puede tener uno de los valores $j = 1, 2, \ldots, n$. Con ello f es una función continuamente derivable en la clausura de cierta región acotada $(n-1)$-dimensional g de puntos $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

Por definición, la superficie suave a trozos en R_n se compone de un número finito de trozos suaves (superficies) que no se intersecan a no ser en sus bordes.

Vamos a repetir la definición de una integral múltiple sin recurrir a los problemas del contenido geométrico o físico.

Supongamos que en el espacio R_n de n dimensiones se da una región acotada Ω con una frontera suave a trozos Γ ($\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$) y sobre Ω (o $\overline{\Omega}$) se da la función

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Cortemos $\overline{\Omega}$ en partes Ω_j que no se intersequen, a no ser por sus bordes, que consideraremos como suaves a trozos. Para abreviar, diremos que hemos realizado la partición ρ del conjunto Ω.

Escojamos en cada parte Ω_j un punto arbitrario $\xi^j = (\xi_1^j, \ldots, \xi_n^j)$ ($\xi^j \in \Omega_j$) y hagamos la suma

$$S_\rho(f) = \sum_{j=1}^{N} f(\xi^j)\, m\Omega_j,$$

a la cual llamaremos *suma integral de Riemann* de la función f correspondiente a la partición ρ.

El límite de la suma

$$\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} S_\rho(f) = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(\xi^j)\, m\Omega_j =$$

$$= \int_{\Omega} f(x)\, dx = \int \ldots \int_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad (5)$$

cuando el diámetro máximo de los conjuntos parciales Ω_j tiende a cero se llama *integral múltiple de la función f sobre* Ω (o según Ω).

Cabe señalar que el límite (5) se llama integral múltiple de la función f si no depende de la elección de los puntos ξ^j en Ω_j ni de los métodos de partición ρ de la región Ω.

Hagamos algunas observaciones.

Observación 1. No tiene importancia el hecho de que calculemos el límite (5) para la región Ω o para su clausura $\overline{\Omega}$. Esto se debe a que $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$, donde Γ es la frontera de Ω supuesta suave a trozos. Hay que decir que una frontera suave a trozos tiene la medida n-dimensional cero ($m\Gamma = 0$, véase a continuación el § 2.2).

Observación 2. Si el límite (5), o sea, la integral múltiple $\int f\, d\Omega$

existe, la función $f(x)$ está limitada sobre $\bar{\Omega}$ ($|f(x)| \leqslant M$). Esto se demuestra al igual que en el caso de una integral definida unidimensional.

Observación 3. Si máx $d(\Omega_j) \to 0$, la suma de las medidas de las partes Ω_j que se adhieren directamente a la frontera suave a trozos Γ tiende asimismo a cero

$$\sum'' m\Omega_j \to 0.$$

Aquí el trazo doble de $\sum$ significa que la suma concierne a las partes Ω_j que se adhieren a Γ.

Por ejemplo, si la región Ω es cortada en partes por una cuadrícula, como lo muestra la fig. 27, entonces la partición respectiva se puede escribir en la forma

$$\Omega = \sum' \Omega_j + \sum'' \Omega_j,$$

donde la suma $\sum'$ concierne a los cuadrados completos (que han entrado en Ω) y la suma $\sum''$ concierne a los cuadrados incompletos.

Es importante que la medida de la segunda suma tienda a cero al tender indefinidamente a cero el diámetro de la diagonal de la cuadrícula:

$$\sum'' m\Omega_j \xrightarrow[\text{máx } d(\Omega_j)\to 0]{} 0.$$

Observación 4. De las observaciones precedentes se deduce que

$$\left|\sum'' f(\xi^j)\, m\Omega_j\right| \leqslant \sum'' M \cdot m\Omega_j = M \sum'' m\Omega_j \xrightarrow[\text{máx } d(\Omega_j)\to 0]{} 0.$$

Esto muestra que la integral (5) se puede definir al igual que el límite de la suma

$$\lim_{\text{máx } d(\Omega_j)\to 0} \sum'' f(\xi^j)\, m\Omega_j = \int_{\Omega} f(x)\, dx$$

que concierne sólo a las partes Ω_j de partición que no se adhieren a Γ.

Formalmente no vamos a argumentar las observaciones 1, 2, 3 y 4. Además, éstas se deducen fácilmente del § 2.2 que sigue a continuación.

§ 2.2. Algunas nociones de la teoría de la medida de Jordan

Limitémonos a examinar conjuntos bidimensionales. Asignemos en un plano el sistema rectangular de coordenadas (x, y).

Asignemos un número natural N y dos sistemas de rectas

$$x = kh \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$y = lh \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad h = 2^{-N}$$

que definen en el plano una cuadrícula cuyos cuadrados tienen el lado h. Llamaremos a tal cuadrícula h-cuadrícula (fig. 28). Claro está que al pasar de N

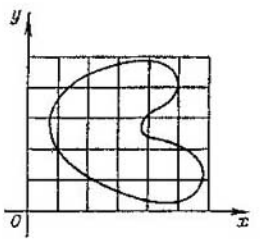

Fig. 27.

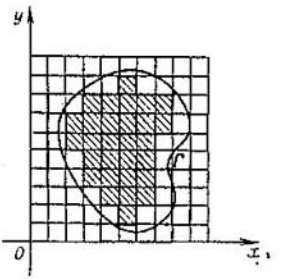

Fig. 28.

a $N + 1$ cada cuadrado de la h-cuadrícula ($h = 2^{-N}$) se corta en cuatro cuadraditos iguales. Estos últimos forman ya $h = 2^{-N-1}$ — cuadrícula.

Asignemos en el plano un conjunto acotado arbitrario Ω y para el número dado N introduzcamos dos conjuntos: $\underline{\Omega}_N$ y $\overline{\Omega}_N$. El primero de ellos $\underline{\Omega}_N$ es la suma (en la teoría de los conjuntos) de los cuadraditos de la h-cuadrícula ($h = 2^{-N}$) cada uno de los cuales pertenece por completo a Ω (en la fig. 28 es la parte rayada). Llamaremos a $\underline{\Omega}_N$ *figura interior del conjunto* Ω (definida por la h-cuadrícula dada). Puede ocurrir que $\underline{\Omega}_N$ sea un conjunto vacío, o sea, no haya ningún cuadradito que pertenezca por completo a Ω. Esto tiene lugar, por ejemplo, si Ω es un conjunto compuesto de un número finito de puntos o bien si esto es el trozo de una curva suave.

Llamaremos al segundo conjunto $\overline{\Omega}_N$ *figura exterior del conjunto* Ω (definida por la h-cuadrícula dada). Es la suma de los cuadraditos de la h-cuadrícula cada uno de los cuales contiene al menos un solo punto de Ω.

Es evidente que

$$\underline{\Omega}_N \subset \Omega \subset \overline{\Omega}_N$$

y las áreas de las figuras $\underline{\Omega}_N$ y $\overline{\Omega}_N$, las cuales vamos a designar por $|\underline{\Omega}_N|$ y $|\overline{\Omega}_N|$, satisfacen la desigualdad

$$|\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_N| \quad (N = 1, 2, \ldots).$$

Si $\underline{\Omega}_N$ es un conjunto vacío, se supone que $|\underline{\Omega}_N| = 0$.

No es difícil ver que

$$\underline{\Omega}_1 \subset \underline{\Omega}_2 \subset \underline{\Omega}_3 \subset \ldots \subset \Omega \subset \ldots \subset \overline{\Omega}_3 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1,$$

de donde

$$|\underline{\Omega}_1| \leqslant |\underline{\Omega}_2| \leqslant |\underline{\Omega}_3| \leqslant \ldots \leqslant |\overline{\Omega}_3| \leqslant |\overline{\Omega}_2| \leqslant |\overline{\Omega}_1|.$$

Ahora bien,

$$|\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_M|,$$

cualesquiera que sean los números naturales N y M.

Si se fija M, los números $|\underline{\Omega}_N|$, al crecer N indefinidamente, no decrecen manteniéndose no mayores que el número $|\overline{\Omega}_M|$. Esto muestra que existe el límite

$$\lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N| \leqslant |\overline{\Omega}_M|.$$

Se llama *medida interior del conjunto* Ω y se designa así:

$$\lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N| = m_i\Omega.$$

Es un número completamente determinado que no depende de N. Hemos obtenido la desigualdad

$$m_i\Omega \leqslant |\overline{\Omega}_M| \quad (M = 1, 2, \ldots),$$

donde los números $|\overline{\Omega}_M|$ no crecen monótonamente al crecer indefinidamente M. Pero entonces existe el límite

$$\lim_{N\to\infty} |\overline{\Omega}_M| \geqslant m_i\Omega$$

que se llama *medida exterior de Jordan* del conjunto Ω y se designa por $m_e\Omega$.

Así, pues, un *conjunto acotado arbitrario* Ω *del plano tiene las medidas interior y exterior* $m_i\Omega$ *y* $m_e\Omega$. *Son números no negativos que satisfacen la desigualdad* $m_i \leqslant m_e\Omega$.

Si de hecho tiene lugar la igualdad, entonces el conjunto Ω se llama *medido según Jordan en el sentido bidimensional* y el número

$$m\Omega = m_i\Omega = m_e\Omega$$

se denomina *medida bidimensional* Ω *según Jordan*.

Llamaremos a la medida de Jordan también simplemente *medida* [1]).

Así, pues, el conjunto Ω es medible (según Jordan) si para él

$$\lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N| = \lim_{N\to\infty} |\overline{\Omega}_N|. \tag{1}$$

Designemos por Γ la frontera del conjunto Ω ($\Gamma = \partial\Omega$). Para obtener el conjunto de cuadraditos de la cuadrícula que cubren Γ, o bien, para obtener la figura que cubre Γ (véase la fig. 28) es necesario restar, en el sentido de la teoría de los conjuntos, de la figura $\overline{\Omega}_N$ la figura $\underline{\Omega}_N$ y cerrar el conjunto obtenido

$$\overline{\Gamma}_N = \overline{\overline{\Omega}_N \setminus \underline{\Omega}_N}.$$

[1]) En las matemáticas modernas tiene gran importancia también otra medida, llamada medida de Lebesgue. H. Lebesgue (1875—1941), matemático francés.

Es evidente que el área (medida bidimensional) $\overline{\Gamma}_N$ es igual a

$$|\overline{\Gamma}_N| = |\overline{\Omega}_N| - |\underline{\Omega}_N|.$$

De (1) se deduce:

$$\lim_{N\to\infty} |\overline{\Gamma}_N| = \lim_{N\to\infty} |\overline{\Omega}_N| - \lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N| = 0. \tag{2}$$

Viceversa, de la igualdad

$$\lim_{N\to\infty} |\overline{\Gamma}_N| = 0, \tag{3}$$

teniendo en cuenta que existen los límites $\lim_{N\to\infty} |\overline{\Omega}_N|$ y $\lim_{N\to\infty} |\underline{\Omega}_N|$, se deduce la igualdad (1), o sea, que es medible Ω.

Notemos que el límite (3) es la medida exterior de Γ, o sea

$$m_e\Gamma = 0.$$

Pero $0 \leqslant m_i\Gamma \leqslant m_e\Gamma$, por eso

$$m_i\Gamma = m_e\Gamma = 0.$$

Hemos demostrado una afirmación importante: *para que el conjunto Ω de un plano sea medible según Jordan, es necesario y suficiente que la medida de su frontera sea igual a cero* ($m\Gamma = 0$).

A continuación mostraremos que una *curva suave a trozos tiene la medida bidimensional cero*. Pero entonces la *región Ω que tiene la frontera suave a trozos es medible según Jordan, en el sentido bidimensional*.

Examinemos los ejemplos.

EJEMPLO 1. El conjunto Ω compuesto por un solo punto tiene la medida bidimensional cero ($m\Omega = 0$). El punto puede pertenecer, como máximo, a cuatro cuadraditos de la h-cuadrícula, su área total tiende a cero cuando $N \to \infty$ y, por consiguiente, $m_e\Omega = 0$, pero $0 \leqslant m_i\Omega \leqslant m_e\Omega$, por eso $m_i\Omega = m_e\Omega = m\Omega = 0$.

EJEMPLO 2. *La curva continua* Γ (fig. 29) $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ *tiene la medida bidimensional cero* ($m\Gamma = 0$).

En efecto, debido a la continuidad uniforme de f en $[a, b]$ para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ para todos x', $x'' \in [a, b]$ que satisfagan la desigualdad $|x' - x''| < \delta$. El número hallado $\delta > 0$ se puede disminuir como queramos. Supondremos que $\delta < \varepsilon$. Asignemos una h-cuadrícula con

$$h = 2^{-N} < \delta$$

y examinemos una columna cualquiera compuesta de los cuadrados de la cuadrícula que contienen los puntos de Γ. La altura de la columna no supera $\varepsilon + 2h$ (en la fig. 29 para $\varepsilon = 2h$ la columna escogida comprende cuatro cuadraditos de la h-cuadrícula que contienen los puntos de Γ y $\varepsilon + 2h = 4h$) y el área no supera $(\varepsilon + 2h)\,h$. El área total de las columnas que cubren Γ no sobrepasa

$$(\varepsilon + 2h)\,h \cdot \frac{K}{h} = (\varepsilon + 2h)\,K \leqslant 3\varepsilon K,$$

donde K es la longitud del segmento con los extremos de números enteros que contiene el segmento $[a, b]$.

Esto muestra que el área total $|\overline{\Gamma}_N|$ de los cuadraditos que cubren la curva Γ, al ser N suficientemente grande, puede ser menguada hasta un valor menor que un número positivo tan pequeño como se quiera, asignado de antemano; por

lo tanto, la medida exterior de Γ, y tanto más la interior, es igual a cero. Pero entonces

$$m\Gamma = 0.$$

Puesto que la *suma de un número finito de conjunto con la medida cero tiene*, evidentemente, *la medida cero*, entonces del ejemplo 1 se deduce que la *medida bidimensional de un conjunto compuesto por un número finito de puntos es igual a cero.*

Del ejemplo 2 se deduce que la *curva suave*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{4}$$

tiene la medida bidimensional cero (fig. 30).

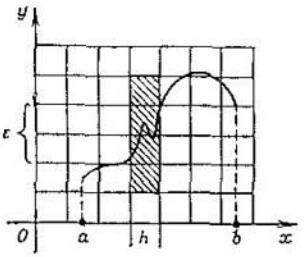

Fig. 29.

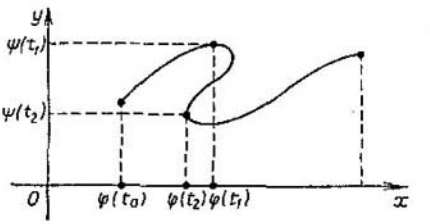

Fig. 30.

El hecho consiste en que si Γ es una curva suave, el segmento $[a, b]$ se puede partir en un número finito de segmentos por los puntos

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

de modo que en cada segmento parcial $[t_j, t_{j+1}]$ una de las dos ecuaciones (4) se pueda resolver respecto a t y sustituir en la segunda. Como resultado obtenemos que el trozo respectivo Γ_j de la curva Γ se describe bien por la ecuación que tiene la forma

$$y = f(x), \quad x \in [c, d],$$

bien por la ecuación que tiene la forma

$$x = g(y), \quad y \in |p, q|,$$

donde las funciones f y g son continuas sobre los segmentos respectivos. Pero entonces, como sabemos del ejemplo 2,

$$m\Gamma_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, r).$$

Por eso, puesto que Γ es la suma de un número finito de los trozos Γ_j,

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{r} \Gamma_j$$

cada uno de los cuales tiene la medida cero, entonces $m\Gamma = 0$.

Notemos que *si dos conjuntos* Ω_1 *y* Ω_2 *son medibles, son medibles también su suma* $\Omega_1 + \Omega_2$, *su diferencia* $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ *y su intersección* $\Omega_1\Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega_2$.

En efecto, designemos por $\Gamma(E)$ la frontera del conjunto E. La fig. 31 muestra dos conjuntos Ω_1 y Ω_2. Es evidente que

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma(\Omega_1 + \Omega_2) \subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2),\\ \Gamma(\Omega_1 \setminus \Omega_2) \subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2),\\ \Gamma(\Omega_1\Omega_2) \quad\subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2).\end{array}\right\} \tag{5}$$

Si Ω_1 y Ω_2 son medibles, entonces $m\Gamma(\Omega_1) = 0$, $m\Gamma(\Omega_2) = 0$, pero entonces las medidas de los primeros miembros de (5) también son iguales a cero lo que demuestra que los conjuntos $\Omega_1 + \Omega_2$, $\Omega_1 \setminus \Omega_2$, $\Omega_1\Omega_2$ son medibles.

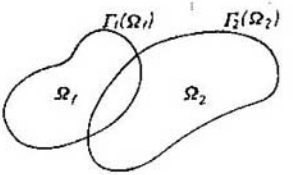

Fig. 31.

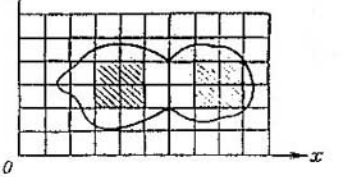

Fig. 32.

Aquí hemos hecho uso de una propiedad evidente de la medida. Si el conjunto ω tiene la medida cero, cualquier conjunto suyo también tiene la medida cero.

Por último, si Ω^1 y Ω^2 son conjuntos medibles que no se intersecan, a no ser que en sus fronteras, entonces

$$m(\Omega^1 + \Omega^2) = m\Omega^1 + m\Omega^2. \tag{6}$$

En efecto, es evidente (fig. 32) que

$$\underline{\Omega}^1_N + \underline{\Omega}^2_N \subset \underline{(\Omega^1 + \Omega^2)}_N \subset \overline{(\Omega^1 + \Omega^2)}_N \subset \overline{\Omega}^1_N + \overline{\Omega}^2_N$$

y como

$$\lim_{N\to\infty} |\,\underline{\Omega}^1_N\,| = \lim_{N\to\infty} |\,\overline{\Omega}^1_N\,| = m\Omega^1,$$

$$\lim_{N\to\infty} |\,\underline{\Omega}^2_N\,| = \lim_{N\to\infty} |\,\overline{\Omega}^2_N\,| = m\Omega^2$$

entonces, evidentemente,

$$\lim_{N\to\infty} (\,|\,\underline{\Omega^1 + \Omega^2}\,)_N\,| = \lim_{N\to\infty} |\,\overline{(\Omega^1 + \Omega^2)}_N\,| = m\Omega^1 + m\Omega^2$$

lo que demuestra (6).

Notemos que si la región Ω es medible, su medida de Jordan es igual a la medida de su clausura:

$$m\Omega = m\overline{\Omega}.$$

En efecto, $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$, donde Γ es la frontera de Ω y $m\overline{\Omega} = m\Omega + m\Gamma$, donde $m\Gamma = 0$.

EJEMPLO 3. El conjunto ω compuesto de todos los números racionales del segmento $[0, 1]$ no es medible según Jordan: $m_i\omega = 0$, $m_e\omega = 1$.

En el caso tridimensional la teoría de la medida de Jordan es análoga. Ahora se introducen el sistema rectangular de coordenadas (x, y, z) y tres familias de planos paralelos

$$x = kh \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$y = lh \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$z = mh \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

que dividen el espacio en cubos de arista $h = 2^{-N}$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Como antes, llamamos a tal partición h-cuadrícula (tridimensional).

Sea Ω un conjunto acotado de puntos que pertenecen al espacio. Designemos por $\underline{\Omega}_N$ la *figura interior del conjunto* Ω, o sea, el conjunto de cubos de la cuadrícula que pertenecen por completo a Ω y por $\overline{\Omega}_N$, la *figura exterior del conjunto* Ω o sea, el conjunto de cubos de la cuadrícula cada uno de los cuales contiene al menos un solo punto de Ω.

Volvemos a concluir que

$$\underline{\Omega}_1 \subset \underline{\Omega}_2 \subset \underline{\Omega}_3 \subset \ldots \subset \Omega,$$
$$\overline{\Omega}_1 \supset \overline{\Omega}_2 \supset \overline{\Omega}_3 \supset \ldots \supset \Omega,$$

de donde se deduce:

$$| \underline{\Omega}_1 | \leqslant | \underline{\Omega}_2 | \leqslant | \underline{\Omega}_3 | \leqslant \ldots,$$
$$| \overline{\Omega}_1 | \geqslant | \overline{\Omega}_2 | \geqslant | \overline{\Omega}_3 | \geqslant \ldots$$

y

$$| \underline{\Omega}_N | \leqslant | \Omega_M |,$$

cualesquiera que sean los números naturales N y M. De aquí se deduce la existencia de los límites

$$\lim_{N \to \infty} | \underline{\Omega}_N | \leqslant \lim_{N \to \infty} | \overline{\Omega}_N |.$$

En esta desigualdad el primer límite se denomina *medida interior* (tridimensional) de Ω:

$$m_i \Omega = \lim_{N \to \infty} | \underline{\Omega}_N |$$

y el segundo, *medida exterior* de Ω:

$$m_e \Omega = \lim_{N \to \infty} | \overline{\Omega}_N |.$$

Ahora bien,

$$m_i \Omega \leqslant m_e \Omega.$$

Si

$$m_i \Omega = m_e \Omega = m\Omega,$$

el conjunto Ω se llama *medible en el sentido tridimensional según Jordan* y el numéro $m\Omega$ se llama *medida tridimensional* de éste.

Por medio de los razonamientos semejantes a los que han sido efectuados respecto a las igualdades (1), (2) y (3) se demuestra que el conjunto es medible en el sentido tridimensional si y sólo si su frontera tiene la medida tridimensional cero.

No vamos a enunciar las propiedades ulteriores de los conjuntos medibles en el sentido tridimensional. Son análogas a las propiedades indicadas de los conjuntos medibles en el sentido bidimensional.

Nos detenemos sólo para explicar el hecho de que una superficie suave a trozos tiene la medida tridimensional cero. Tal superficie comprende un número finito de trozos S que no se intersecan a no ser en sus bordes y cada uno de los cuales, al realizar nueva designación respectiva de las coordenadas se define por la ecuación

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in \overline{g}),$$

donde $\overline{g}$ es la clausura de cierta región limitada en el plano (x, y). Asignemos $\varepsilon > 0$ y escojamos $\delta > 0$ de modo que

$$| f(x', y') - f(x'', y'') | < \varepsilon$$

para todos los puntos (x', y'), $(x'', y'') \in \overline{g}$ que se encuentran uno del otro a la distancia

$$| (x', y') - (x'', y'') | < \delta.$$

Ponemos $\delta < \varepsilon$ y tomamos la h-cuadrícula con $h = 2^{-N} < \delta$. Examinamos una columna cualquiera compuesta de cubos de la cuadrícula que contienen los puntos S. La altura de esta columna no supera $\varepsilon + 2h$ y su volumen no supera $(\varepsilon + 2h)\, h^2$. El volumen total de todas las columnas que cubren S no sobrepasa

$$(\varepsilon + 2h)\, h^2 \cdot \frac{K}{h^2} = (\varepsilon + 2h)K < 3\varepsilon K. \tag{7}$$

Aquí K es el área del cuadrado Δ, cuyos vértices tienen coordenadas de números enteros, el cual cubre el conjunto $\overline{g}$. Puesto que los vértices de Δ poseen las coordenadas de números enteros, ellos se encuentran sobre los planos de la cuadrícula que se examina. El segundo miembro de (7) puede tomarse tan pequeño como se quiera lo que demuestra que la medida tridimensional $mS = 0$.

Por analogía, se puede introducir el concepto de medida de n dimensiones para los conjuntos del espacio R_n y mostrar que una superficie suave en R_n tiene la medida n-dimensional cero.

§ 2.3. Propiedades de las integrales múltiples. Teoremas de existencia

Más adelante Ω, Ω_1, Ω_2 serán las regiones con una frontera suave a trozos (aunque se pueden considerar conjuntos arbitrarios medibles según Jordan).

Es válida la igualdad

$$\int_{\Omega} dx = \int_{\Omega} 1 \cdot dx = m\Omega. \tag{1}$$

Esta igualdad es evidente. Para calcular la integral (1) es necesario cortar por medio de las superficies suaves a trozos la región Ω en partes

$$\Omega = \sum_{k=1}^{N} \Omega_k$$

que no se intersequen, a no ser en sus fronteras (fig. 33), y tener en cuenta que

$$\sum_{k=1}^{N} 1 \cdot m\Omega_k = \sum_{k=1}^{N} m\Omega_k = m\Omega.$$

Pero entonces

$$\lim_{\text{máx } d(\Omega_k)\to 0} \sum_{k=1}^{N} m\Omega_k = m\Omega.$$

Con ayuda de la fórmula (1) en el caso bidimensional se calcula el área de Ω y en el caso tridimensional, el volumen de Ω. En el

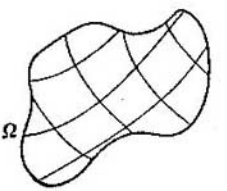

Fig. 33.

caso n-dimensional la fórmula (1) ofrece la medida n-dimensional de Ω.

En adelante veremos que el cálculo de la integral (1) y de una integral más general $\int_{\Omega} f\,dx$ puede ser reducido al cálculo sucesivo de ciertas integrales unidimensionales (véase el § 2.4).

A continuación suponemos que para las funciones $f(x)$, $\varphi(x)$ y $|f(x)|$, de las cuales se tratará, las integrales en cuestión existen. No vamos a mencionar especialmente esta circunstancia.

Es válida la igualdad

$$\int_{\Omega} [Af(x) + B\varphi(x)]\,dx = A\int_{\Omega} f(x)\,dx + B\int_{\Omega} \varphi(x)\,dx, \qquad (2)$$

donde A y B son las constantes.

Si la región Ω con una frontera suave a trozos está cortada en partes medibles Ω_1, Ω_2 ($\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 + \overline{\Omega}_2$), enconces

$$\int_{\Omega} f\,dx = \int_{\Omega_1} f\,dx + \int_{\Omega_2} f\,dx. \qquad (3)$$

Si

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \quad (x \in \Omega), \qquad (4)$$

entonces

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx \leqslant \int_{\Omega} \varphi(x)\,dx. \tag{5}$$

Pero entonces, teniendo en cuenta que

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

obtenemos, en virtud de (2) (cuando $A = -1$, $B = 0$), que

$$-\int_{\Omega} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{\Omega} f(x)\,dx \leqslant \int_{\Omega} |f(x)|\,dx,$$

o sea,

$$\left|\int_{\Omega} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{\Omega} |f(x)|\,dx. \tag{6}$$

En particular, de (6) se deduce que si

$$|f(x)| \leqslant M \quad (x \in \Omega), \tag{7}$$

donde M es la constante, entonces

$$\left|\int_{\Omega} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{\Omega} M\,dx = M \int_{\Omega} dx = M \cdot m\Omega. \tag{8}$$

Es válido el teorema de existencia (véase la demostración en el § 2.5).

TEOREMA 1. *Si la función $f(x)$ es continua en la clausura $\overline{\Omega}$ de una región acotada Ω con una frontera suave a trozos, entonces ella es integrable sobre Ω, al igual que sobre $\overline{\Omega}$, y*

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_{\overline{\Omega}} f(x)\,dx. \tag{9}$$

Notemos que

$$\int_{\overline{\Omega}} f\,dx = \int_{\Omega} f\,dx + \int_{\Gamma} f\,dx = \int_{\Omega} f\,dx + 0 = \int_{\Omega} f\,dx,$$

donde Γ es la frontera de Ω. Según la condición Γ es una frontera suave a trozos. Su medida (n-dimensional) es igual a cero ($m\Gamma = 0$), por lo tanto,

$$\int_{\Gamma} f\,dx = 0.$$

Enunciemos un teorema de existencia más general.

TEOREMA 2. *Si la función $f(x)$ está acotada y es continua en todas las partes de la clausura $\overline{\Omega}$ de una región acotada Ω con una frontera suave a trozos, a excepción de algunos puntos y curvas suaves en un número finito donde ella puede tener discontinuidades, entonces f es integrable sobre Ω, al igual que sobre $\overline{\Omega}$, y se cumple la igualdad* (9).

Formulemos otro teorema más.

TEOREMA 3 (DEL VALOR MEDIO). *Sea $f(x)$ una función continua en la clausura $\overline{\Omega}$ de la región Ω y supongamos conexa*[1]) *esta clausura. Entonces existe un punto x^0 tal ($x^0 \in \overline{\Omega}$) que se cumple la igualdad*

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = f(x^0)\,m\Omega. \tag{10}$$

DEMOSTRACION. Según la condición dada la función f es continua sobre el conjunto acotado cerrado $\overline{\Omega}$, por eso sobre $\overline{\Omega}$ existen los puntos x^1 y x^2 ($x^1, x^2 \in \overline{\Omega}$) en los cuales f alcanza, respectivamente, su mínimo y su máximo sobre $\overline{\Omega}$:

$$f(x^1) \leqslant f(x) \leqslant f(x^2), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Integrando estas desigualdades respecto a Ω, obtenemos

$$\int_{\Omega} f(x^1)\,dx \leqslant \int_{\Omega} f(x)\,dx \leqslant \int_{\Omega} f(x^2)\,dx$$

o bien

$$f(x^1)\,m\Omega \leqslant \int_{\Omega} f(x)\,dx \leqslant f(x^2)\,m\Omega. \tag{11}$$

De las desigualdades (11) resulta que el número

$$C = \frac{1}{m\Omega}\int_{\Omega} f\,dx \quad (m\Omega \neq 0)$$

se halla entre el valor mínimo de la función $f(x^1)$ y el valor máximo de $f(x^2)$. En virtud de la conexión de $\overline{\Omega}$ existe la curva continua, perteneciente a $\overline{\Omega}$,

$$r(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

que une los puntos x^1 y x^2, o sea, tal que

$$r(t_1) = x^1, \quad r(t_2) = x^2.$$

La función

$$F(t) \equiv f[r(t)] = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

[1]) El conjunto E se llama *conexo* si se puede unir dos de sus puntos con una curva continua perteneciente a E.

es continua sobre el segmento $[t_1, t_2]$ (como superposición de las funciones continuas) y toma en sus extremos los valores

$$F(t_1) = f(x^1), \quad F(t_2) = f(x^2).$$

Pero entonces según el teorema del valor intermedio para la función $F(t)$ de una variable existe tal $t_0 \in [t_1, t_2]$ que en el punto $x^0 = r(t_0)$ tiene lugar la igualdad

$$F(t_0) = f[r(t_0)] = f(x^0) = C$$

y hemos demostrado (10).

Observación. El número $f(x^0)$ que figura en (10) se llama *valor medio* de la función continua f sobre la región Ω.

§ 2.4. Integral como función del parámetro. Reducción de una integral múltiple a las reiteradas

Examinemos la integral

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy, \tag{1}$$

donde la función $f(x, y)$ está dada sobre el rectángulo

$$\Delta = [a, b] \times [c, d], \tag{2}$$

o sea, sobre el conjunto de puntos (x, y), donde

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d \quad (a < b,\ c < d).$$

Aquí la integración se realiza respecto a la variable y. Pero la función subintegral depende tanto de y como de x, por eso la integral (1) es la función de $(F(x))$.

Se dice que la integral (1) es la *función del parámetro* x.

TEOREMA 1. *Si la función $f(x, y)$ es continua sobre un rectángulo Δ, entonces la función $F(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^d [f(x+h, y) - f(x, y)]\, dy \quad (x, x+h \in [a, b]).$$

Puesto que la función f es continua sobre el conjunto acotado cerrado Δ, entonces ella es uniformemente continua sobre Δ. Por consiguiente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x+h \quad y)-f(x,\ y)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

para todos $(x,\ y)$, $(x+h,\ y) \in \Delta$, sólo $|h| < \delta$. Pero entonces

$$|F(x+h)-F(x)| \leqslant \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}\,dy = \frac{\varepsilon}{d-c}\cdot(d-c) = \varepsilon$$

y el teorema queda demostrado.

TEOREMA 2. *Para las condiciones del teorema 1 existe la integral reiterada*

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\ y)\,dy. \tag{3}$$

En efecto, la función $F(x)$, continua sobre el segmento $[a,\ b]$, es integrable sobre éste.

TEOREMA 3. *Para las condiciones del teorema 1 son válidas las igualdades*

$$\iint_\Delta f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\ y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,\ y)\,dx. \tag{4}$$

El primer término de la cadena (4) es una integral múltiple de la función continua sobre el conjunto cerrado Δ provisto de una frontera suave a trozos. Este término existe (véase a continuación el § 2.5). Las integrales reiteradas, que no son más que los términos segundo y tercero de la cadena de igualdades (4), asimismo existen según el teorema 2.

El teorema dado afirma la igualdad de estas tres integrales. De este modo el cálculo de la integral múltiple se reduce al cálculo de las integrales unidimensionales respecto a cada variable x e y por separado.

DEMOSTRACION. Dividamos los lados de Δ en N partes iguales:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_N = d$$

y por los puntos de división tracemos unas rectas paralelas al eje y y al eje x, respectivamente. De este modo Δ se partirá en rectángulos iguales Δ_{kl}:

$$\Delta = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta_{kl},$$

$$\Delta_{kl} = \{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1},\ y_l \leqslant y \leqslant y_{l+1}\}$$

y

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \int_c^d f(x, y)\, dy =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \sum_{l=0}^{N-1} \int_{y_l}^{y_{l+1}} f(x, y)\, dy =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+}} dx \int_{y_l}^{y_{l+1}} f(x, y)\, dy =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{y_l}^{y_{l+1}} f(\xi_k, y)\, dy \Delta x_k = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(\xi_k, \eta_l)\, \Delta x_k \Delta y_l$$

$$(x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1},\ y_l \leqslant \eta_l \leqslant y_{l+1}). \qquad (5)$$

Primero hemos aplicado el teorema del valor medio a la integral $\int_{x_k}^{x_{k+1}}$ respecto a x de la función $\int_{y_l}^{y_{l+1}} f(x, y)\, dy$ y luego hemos aplicado el mismo teorema a la integral $\int_{y_l}^{y_{l+1}} f(\xi_k, y)\, dy$.

Así hemos demostrado que la integral reiterada del primer miembro de (5) se puede considerar como la suma integral de la integral múltiple $\iint_\Delta f\, dx\, dy$, suma correspondiente a la partición de Δ en partes Δ_{kl} en ciertos puntos $(\xi_k, \eta_l) \in \Delta_{kl}$.

Pasemos ahora al límite en la igualdad (5) cuando $N \to \infty$. En este caso el primer miembro de (5) es un número determinado (no dependiente de N) y el segundo tiende, para $N \to \infty$, hacia una integral múltiple de f respecto a Δ (si la integral múltiple existe, toda suma integral tiende hacia ella). Por eso

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \iint_\Delta f\, dx\, dy$$

y queda demostrada la primera igualdad (4). La igualdad de la segunda integral reiterada con la integral múltiple se demuestra de un modo análogo.

Examinemos en el plano (x, y) la región Ω acotada por las curvas suaves (fig. 34)

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

donde

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Supongamos que en la clausura $\bar{\Omega}$ de la región Ω se da una función continua arbitraria $f(x, y)$. Para calcular la integral múltiple

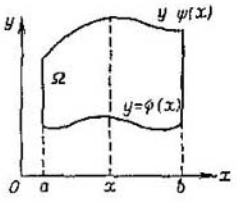

Fig. 34.

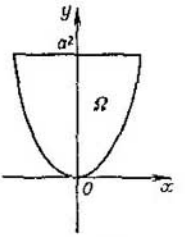

Fig. 35.

de $f(x, y)$ respecto a la región Ω (o bien lo que es lo mismo, respecto a $\bar{\Omega}$) se aplica el método siguiente: primeramente se integra la función $f(x, y)$ respecto a la variable y entre $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$, considerando x constante, y luego el resultado se integra respecto a x sobre el segmento $[a, b]$;

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy. \tag{6}$$

En el caso cuando Ω es un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas la igualdad (6) ha sido argumentada anteriormente (véase el teorema 3). Utilizando los mismos razonamientos se podría argumentar (6) también en el caso general.

EJEMPLO 1. Calcular el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \quad (a, b > 0).$$

Llamamos elipse a un conjunto de puntos (x, y) para los cuales $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, al igual que el conjunto de puntos (x, y) para los

cuales $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Nos permitiremos cierta libertad llamando elipsoide tanto al conjunto de los puntos (x, y, z) para los cuales $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ como también al conjunto de los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

RESOLUCIÓN. La región Ω de que se trata está limitada inferiormente por la curva

$$y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\leqslant x\leqslant a)$$

y superiormente por la curva

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\leqslant x\leqslant a).$$

El área buscada es igual a

$$m\Omega=\iint\limits_{\Omega}dx\,dy=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy=$$

$$=\frac{2b}{a}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=(x=a\operatorname{sen}\theta,\ dx=a\cos\theta\,d\theta)=4b\int\limits_{0}^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\,d\theta=$$

$$=4ab\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta=4ab\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=$$

$$=2ab\left[\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab.$$

EJEMPLO 2. Calcular el área de la figura Ω limitada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=a^2$ (fig. 35).

Tenemos

$$m\Omega=\iint\limits_{\Omega}dx\,dy=2\int\limits_{0}^{a^2}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y}}dx=2\int\limits_{0}^{a^2}\sqrt{y}\,dy=\frac{4}{3}a^3.$$

El método de calcular las integrales múltiples reduciéndolas a las unidimensionales se aplica en los espacios de mediciones cualesquiera. Mostremos esto, citando ejemplos.

EJEMPLO 3. Es necesario calcular el volumen Ω del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1 \quad (a,\ b,\ c>0).$$

Para esto resolvamos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

De ello obtenemos dos funciones continuas

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Estas funciones están definidas sobre el conjunto ω de los puntos (x, y) que satisfacen la inecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$

El volumen o la medida tridimensional Ω es igual a la integral múltiple

$$V=m\Omega=\iiint\limits_{\Omega} 1\cdot dx\,dy\,dz.$$

Para calcularlo es necesario para cualquier punto $(x, y)\in\omega$ integrar la función unidad (igual a 1) respecto a z entre

$$z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \text{ y } z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

El resultado, dependiente de (x, y), debe ser integrado luego respecto a todos los puntos $(x, y)\in\omega$;

$$V=\iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\omega} dx\,dy\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz=$$

$$=2c\iint\limits_{\omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=$$

$$=2c\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

La última igualdad en esta cadena se deduce de la fórmula (6). Los cálculos ulteriores exigen solamente el dominio de la técnica de integración:

$$V=\frac{8c}{b}\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)-y^2}\,dy=$$

$$=\left(y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\operatorname{sen} t\right)=\frac{8c}{b}\int_0^a dx\int_0^{\pi/2}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{8bc}{a^2}\frac{\pi}{4}\int_0^a(a^2-x^2)\,dx;\ \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

Luego

$$V=\frac{2\pi bc}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi\,abc.$$

EJEMPLO 4. Hallar el volumen de una parte del paraboloide de revolución Ω: $x^2+y^2\leqslant z\leqslant a^2$ (fig. 36). Al igual que en el ejemplo 3 tenemos

$$m\Omega=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz=\iint_\omega dx\,dy\int_{x^2+y^2}^{a^2}dz,$$

donde ω es el conjunto de los puntos (x, y) que satisfacen la inecuación $x^2+y^2\leqslant a^2$, o sea, es un círculo de radio a. Luego tenemos

$$m\Omega=\iint_\omega(a^2-x^2-y^2)\,dx\,dy=\int_{-a}^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(a^2-x^2-y^2)\,dy=$$

$$=4\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(a^2-x^2-y^2)\,dy=\frac{8}{3}\int_0^a(a^2-x^2)^{3/2}\,dx=(x=a\operatorname{sen} t)=$$

$$=\frac{8a^4}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt=\frac{8a^4}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt=$$

$$=\frac{\pi a^4}{3}+\frac{2a^4}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{\pi a^4}{3}+\frac{a^4}{3}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 4t)\,dt=\frac{\pi a^4}{3}+\frac{\pi a^4}{6}=\frac{\pi a^4}{2}.$$

EJEMPLO 5. Hallar el volumen del cuerpo Ω limitado por las superficies de los paraboloides de revolución $x^2 + y^2 = z$, $z = 2(x^2 + y^2)$ y por las superficies cilíndricas $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ (fig. 37).

Nuestro cuerpo es un «zapatillo parabólico» que cortan las superficies cilíndricas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ entre los paraboloides de revolución. El zapatillo está limitado inferiormente por un trozo de la

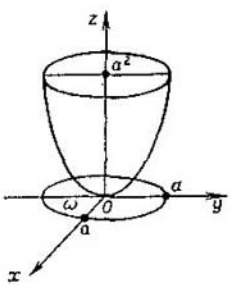

Fig. 36.

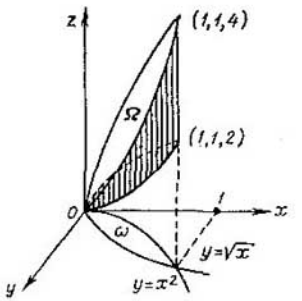

Fig. 37.

superficie $z = x^2 + y^2$ y superiormente por un trozo de la superficie del paraboloide de revolución $z = 2(x^2 + y^2)$. La proyección de este cuerpo Ω sobre el plano (x, y) proporciona el conjunto ω compuesto de los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

Por eso

$$m\Omega = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iint_{\omega} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz =$$

$$= \iint_{\omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2(\sqrt{x} - x^2) + \frac{1}{3}(x^{3/2} - x^6) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{5/2} - x^4 + \frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} + \frac{2}{15} - \frac{1}{21} = \frac{6}{35}.$$

Volvamos de nuevo a la integral (1) que depende del parámetro.

TEOREMA 4. *Si la función $f(x, y)$ es continua y tiene una derivada continua f'_x sobre el rectángulo*

$$\Delta = [a, b] \times [c, d],$$

entonces la función

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

tiene una derivada sobre el segmento $[a, b]$, además

$$F'(x) = \int_c^d f'_x(x, y)\, dy. \tag{7}$$

DEMOSTRACIÓN. Debemos demostrar que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \int_c^d f'_x(x, y)\, dy. \tag{8}$$

Aplicando la igualdad (fórmula de Newton — Leibniz)

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_0^h \varphi'(x+u)\, du,$$

tenemos

$$\Lambda = \left| \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \int_c^d f'_x(x, y)\, dy \right| = \left| \int_c^d \frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x}\, dy - \int_c^d f'_x(x, y)\, dy \right| =$$

$$= \left| \int_c^d \left(\frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} f'_x(x+u, y)\, du \right) dy - \int_c^d f'_x(x, y)\, dy \right| =$$

$$= \left| \int_c^d \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} [f'_x(x+u, y) - f'_x(x, y) du\, dy] \right|.$$

Puesto que $f'_x(x, y)$ es continua sobre Δ, ella será también uniformemente continua sobre Δ, por eso

$$| f'_x(x, y) - f'_x(x+u, y) | < \varepsilon$$

tan pronto como $| u | \leqslant | \Delta x | < \delta$ para todos puntos $(x, y) \in \Delta$. Sobre esta base

$$\Lambda \leqslant \int_c^d \frac{1}{| \Delta x |} \left| \int_0^{\Delta x} \varepsilon\, du \right| dy = \varepsilon (d - c)$$

cuando $|\Delta x| < \delta$. Ahora bien, la igualdad (8), y con ella también (7), queda demostrada.

Examinemos ahora una integral más general que (1)

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy, \tag{9}$$

donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son las funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$ que satisfacen las desigualdades

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

y la función $f(x, y)$ es continua para todos los puntos (x, y) que satisfacen las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x).$$

Mostremos que para las condiciones indicadas la función $F(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$.

En efecto, sustituyamos en la integral (9) la variable de integración y por la variable u con ayuda de la igualdad

$$y = \varphi(x) + u[\psi(x) - \varphi(x)] \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{10}$$

Cuando $u = 0$ $y = \varphi(x)$, cuando $u = 1$ $y = \psi(x)$, $dy = [\psi(x) - \varphi(x)]\, du$ (x está fijo y lo consideramos constante al sustituir la variable). Por consiguiente,

$$F(x) = [\psi(x) - \varphi(x)] \int_0^1 f(x, \varphi(x) + u[\psi(x) - \varphi(x)])\, du. \tag{11}$$

Aquí el factor $\psi(x) - \varphi(x)$ es la función continua de $x \in [a, b]$ y bajo el signo integral está la función continua del punto (x, u) perteneciente al rectángulo $[a, b] \times [0, 1]$. Por eso la misma integral es la función continua sobre el segmento $[a, b]$ según el teorema 1. La función $F(x)$ será continua sobre el segmento $[a, b]$ como producto de dos funciones continuas.

TEOREMA 5. *Si la función $f(x, y)$ es continua con su derivada parcial f'_x sobre la región*

$$\Omega = \{a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$$

y las funciones φ, ψ, φ', ψ' son continuas sobre el segmento $[a, b]$, entonces la función (9) tiene la derivada que se calcula por la fórmula

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x, y)\, dy + \psi'(x) f(x, \psi(x)) - \varphi'(x) f(x, \varphi(x)). \tag{12}$$

DEMOSTRACION. Introduzcamos la función auxiliar

$$I(x,\ u,\ v)=\int_u^v f_x(x,\ y)\,dy$$

dada sobre el conjunto $\{a\leqslant x\leqslant b,\ \varphi(x)\leqslant u\leqslant v\leqslant\psi(x)\}$. Conforme al teorema 4

$$\frac{\partial I}{\partial x}=\int_u^v f'_x(x,\ y)\,dy$$

Utilizando la regla de derivación de una integral con el límite variable de integración, tenemos

$$\frac{\partial I}{\partial v}=f(x,\ v),\quad \frac{\partial I}{\partial u}=-f(x,\ u).$$

Luego $F(x)=I[x,\ \varphi(x),\ \psi(x)]$, por eso según la regla de derivación de una función compuesta obtenemos

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial I[x,\ \varphi(x),\ \psi(x)]}{\partial x}+\frac{\partial I[\ldots]}{\partial u}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\partial I[\ldots]}{\partial v}\frac{d\psi}{dx}=$$

$$=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x,\ y)\,dy-f(x,\ \varphi(x))\,\varphi'(x)+f(x,\ \psi(x))\,\psi'(x)$$

que es lo que se necesitaba demostrar.

EJEMPLO 6. Hallar la derivada de la función

$$F(x)=\int_{x^2}^{x}\operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dy.$$

Con arreglo a (12) obtenemos

$$F'(x)=\int_{x^2}^{x}\cos(x^2+y^2)\cdot 2x\,dy+1\ \operatorname{sen}(x^2+y^2)-2x\operatorname{sen}(x^2+x^4).$$

§ 2.5. Demostración de la existencia de la integral de una función continua

Asignemos sobre un conjunto acotado cerrado $\overline{\Omega}$ del espacio R_n una función continua $f(x)$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$. Supongamos que $m\Omega>0$. Realicemos dos particiones ρ y ρ' de la región Ω en partes medibles que nunca se intersequen, en cada caso, a no ser en sus fronteras:

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{N}\Omega_k,\quad \Omega=\bigcup_{l=1}^{M}\Omega'_l$$

y determinemos las sumas integrales correspondientes

$$S_\rho = \sum_{k=1}^{N} f(\xi^k)\, m\Omega_k \quad (\xi^k = (\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k) \in \Omega_k),$$

$$S_{\rho'} = \sum_{l=1}^{M} f(\eta^l) m\Omega_l \quad (\eta^l = (\eta_1^l, \ldots, \eta_n^l) \in \Omega_l').$$

Designemos la intersección de Ω_k y Ω_l' por

$$\Omega_{kl} = \Omega_k \Omega_l'.$$

Es evidente que

$$S_\rho = \sum_{k=1}^{N} f(\xi^k) \sum_{l=1}^{M} m\Omega_{kl} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{M} f(\xi^k) m\Omega_{kl},$$

$$S_{\rho'} = \sum_{l=1}^{M} f(\eta^l) \sum_{k=1}^{N} m\Omega_{kl} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{M} f(\eta^l) m\Omega_{kl}.$$

Por eso

$$|S_\rho - S_{\rho'}| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{M} |f(\xi^k) - f(\eta^l)|\, m\Omega_{kl} \leqslant \sum\nolimits'' |f(\xi^k) - f(\eta^l)|\, m\Omega_{kl},$$

donde la suma $\sum''$ concierne a los conjuntos no vacíos Ω_{kl}, puesto que la medida de un conjunto vacío es también igual a cero.

Por cuanto la función $f(x)$ es continua sobre el conjunto acotado cerrado $\overline{\Omega}$, ella es uniformemente continua sobre éste, por eso para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar tal $\delta > 0$ que

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2m\Omega}$$

para todos los x', $x'' \in \overline{\Omega}$ que satisfágan las desigualdades

$$|x' - x''| < \delta.$$

Supongamos que las particiones ρ y ρ' son tales que los diámetros de sus conjuntos parciales sean menores que δ:

$$d(\Omega_k) < \delta, \quad d(\Omega_l) < \delta. \tag{1}$$

Pero entonces sobre un conjunto no vacío Ω_{kl}

$$|f(\xi^k) - f(\eta^l)| = |f(\xi^k) - f(\lambda^{kl}) + f(\lambda^{kl}) - f(\eta^l)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(\xi^k) - f(\lambda^{kl})| + |f(\lambda^{kl}) - f(\eta^l)| < \frac{\varepsilon}{2m\Omega} + \frac{\varepsilon}{2m\Omega} = \frac{\varepsilon}{m\Omega},$$

donde

$$\lambda^{kl} = (\lambda_1^{kl}, \ldots, \lambda_n^{kl})$$

es cierto punto perteneciente a Ω_{kl}. Pero entonces al cumplirse la condición (1)

$$|S_\rho - S_{\rho'}| < \sum\nolimits' \frac{\varepsilon}{m\Omega} m\Omega_{kl} = \frac{\varepsilon}{m\Omega} \sum\nolimits' m\Omega_{kl} = \frac{\varepsilon}{m\Omega} \cdot m\Omega = \varepsilon$$

lo cual, como se puede demostrar, lleva la existencia de la integral de f respecto a $\overline{\Omega}$.

Si $m\Omega = 0$, la integral de f sobre Ω existe, evidentemente, y es igual a cero.

§ 2.6. Cambio de variables. Caso elemental

Mostremos cómo se modifica la integral

$$\iint\limits_{\Omega'} f(x_1', x_2')\, dx_1'\, dx_2' \tag{1}$$

si en ella se efectúa la sustitución de las variables

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2, \\ x_2' &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \qquad \left(D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\right). \tag{2}$$

Suponemos que Ω' es la región con una frontera continua suave a trozos Γ' (fig. 38).

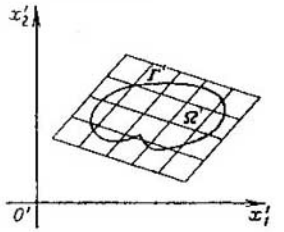

Fig. 38.

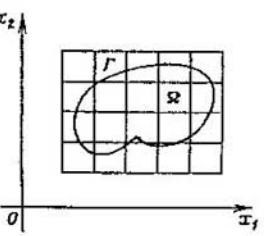

Fig. 39.

La transformación inversa a (2) aplica Ω' sobre cierta región Ω del plano (x_1, x_2) con la frontera suave a trozos Γ (fig. 39). De esta manera sobre Ω queda definida la función

$$F(x_1, x_2) = f(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Introduzcamos en el plano (x_1, x_2) una cuadrícula cuyos cuadrados Δ tienen lados de longitud h. Ella se aplica con ayuda de las ecuaciones (2), hablando en general, en una red oblicuángula que divide el plano (x_1', x_2') en paralelogramos iguales Δ' (imágenes de Δ) que tienen el área (las explicaciones siguen a continuación) igual a

$$|\Delta'| = |D| \cdot |\Delta| = h^2 |D|. \tag{3}$$

De este modo quedan definidas las particiones ρ y ρ' de las regiones Ω y Ω', respectivamente.

Expliquemos la igualdad (3) con más detalles. Un cuadrado arbitrario Δ se define por los vectores $(h, 0)$ y $(0, h)$ que, como supondremos, salen del vértice inferior izquierdo de Δ. El primer vector (segmento dirigido) coincide con la base de Δ y el segundo, con el lado vertical de Δ. La transformación (2) aplica estos vectores en los

vectores $(ah,\ ch)$ y $(bh,\ dh)$, respectivamente, que son los lados del paralelogramo Δ'. El área de Δ', como sabemos[1]), es igual a

$$|\Delta'| = \left|\begin{matrix} ah & ch \\ bh & dh \end{matrix}\right| = h^2 \cdot |D|.$$

Tenemos

$$S_{\rho'}(f) = \sum f(x_1',\ x_2')\,|\Delta'| = \sum F(x_1 x_2)\,|D| \cdot |\Delta| = S_\rho(|D|F),$$
$$((x_1,\ x_2) \in \Delta,\ (x_1',\ ) \in \Delta') x_1'. \qquad (4)$$

Consideramos que la segunda suma de esta cadena concierne solamente a los cuadrados completos $\Delta \subset \Omega$ y, respectivamente, la primera, a los paralelogramos completos correspondientes Δ' (véase el § 2.1, observación 4). Pasando al límite en (4) para $h \to 0$, obtenemos la fórmula

$$\int\int_{\Omega} f(x_1',\ x_2')\,dx_1'\,dx_2' = \int\int_{\Omega} F(x_1,\ x_2)\,|D|\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= |D| \int\int_{\Omega} F(x_1,\ x_2)\,dx_1\,dx_2. \qquad (5)$$

En este razonamiento la función f se puede considerar que es continua sobre $\overline{\Omega'}$ y entonces la función F será continua sobre $\overline{\Omega}$. Pero este resultado sigue siendo justo en el caso en que f está acotada sobre Ω' y es continua por doquier sobre Ω', a excepción de algunos puntos o algunas líneas suaves a trozos.

En el párrafo siguiente se da la fórmula general de sustitución de las variables en las integrales múltiples.

§ 2.7. Cambio de variables. Caso general

Limitémonos primero al caso bidimensional. Asignemos dos funciones

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \varphi(x_1,\ x_2), \\ x_2' &= \psi(x_1,\ x_2), \end{aligned}\right\} (x_1,\ x_2) \in \Omega \qquad (1)$$

que tienen las derivadas continuas en la clausura $\overline{\Omega}$ de la región acotada con una frontera suave a trozos. Suponemos que la transformación (1) aplica biunívocamente Ω sobre cierta región Ω' con una frontera suave a trozos.

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 12.

Asignemos una función $f(x')$ que sea continua sobre $\overline{\Omega'}$ o bien esté acotada sobre Ω' y sea continua por doquier, salvo algunos puntos y algunas líneas suaves a trozos.

A estas condiciones la fórmula (5) del § 2.6, relativa a la sustitución de las variables en la integral múltiple se conserva, pero el papel del determinante D lo desempeña desde este momento el determinante de Jacobi[1])

$$D(x) = \frac{D(x_1', x_2')}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0:$$

$$\iint_{\Omega'} f(x_1', x_2')\, dx_1'\, dx_2' = \iint_{\Omega} f[\varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)] \mid D(x) \mid dx_1\, dx_2. \quad (2)$$

El determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ del cual se trató en el § 2.6 también puede considerarse como jacobiano del sistema lineal

$$x_1' = ax_1 + bx_2, \quad x_2' = cx_1 + dx_2.$$

En el caso tridimensional la fórmula de sustitución de las variables tiene el aspecto siguiente:

$$\iiint_{\Omega'} f(x_1', x_2', x_3')\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3' =$$

$$= \iiint_{\Omega} f[\varphi(x_1, x_2, x_3), \psi(x_1, x_2, x_3),$$

$$\chi(x_1, x_2, x_3)] \mid D(x) \mid dx_1\, dx_2\, dx_3, \quad (3)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \varphi(x_1, x_2, x_3), \\ x_2' &= \psi(x_1, x_2, x_3), \\ x_3' &= \chi(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}\right\} (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad (4)$$

son las funciones continuamente derivables en la clausura $\overline{\Omega}$ de la región Ω con la frontera suave a trozos y

$$D(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

[1]) K. G. J. Jacobi (1804—1851), gran matemático y mecánico alemán.

En este caso se supone que la región Ω se aplica biunívocamente sobre Ω' con ayuda de (4). También se supone, como antes, que $f(x')$ es continua sobre $\overline{\Omega}'$ o bien está acotada sobre Ω' y es continua sobre Ω', a excepción de un número finito de puntos, de líneas suaves a trozos y de superficies suaves a trozos.

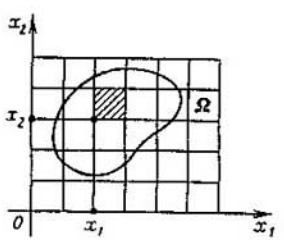

Fig. 40.

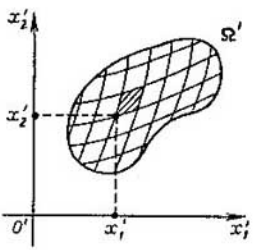

Fig. 41.

En las figs. 40 y 41 se muestran las regiones Ω y Ω' en los planos x_1, x_2 y x_1', x_2', respectivamente. La cuadrícula que divide el plano x_1, x_2 en cuadrados Δ con un lado de longitud h se transforma en red curvilínea que divide Ω' en paralelogramos curvilíneos Δ'.

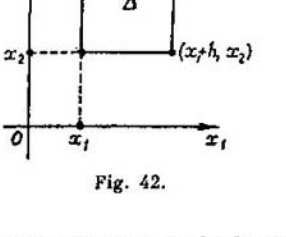

Fig. 42.

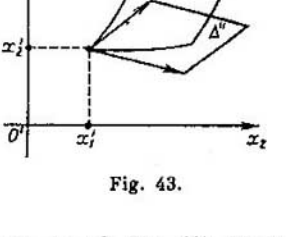

Fig. 43.

Examinemos un cuadrado arbitrario $\Delta \subset \Omega$ (fig. 42). Mediante las transformaciones (1) este cuadrado se aplica en paralelogramo curvilíneo Δ' (fig. 43). Del vértice de Δ' con las coordenadas (x_1', x_2') salen vectores tangentes a los «lados» de Δ':

$$\left(h\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ h\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right),\quad \left(h\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\ h\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)$$

(la pendiente de la tangente a la curva $\begin{cases} x_1' = \varphi(x_1, x_2), \\ x_2' = \psi(x_1, x_2) \end{cases}$ para x_2 fijo es igual a $\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$). Estos vectores sustituyen los «lados» respectivos con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior (¡cuando $h \to 0$!). El paralelogramo Δ'' construido sobre estos vectores tiene un área que se calcula exactamente así:

$$|\Delta''| = h^2 \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} \right| = h^2 \left| \frac{D(x_1', x_2')}{D(x_1, x_2)} \right| = h^2 |D(x)|.$$

Se puede mostrar exactamente que el área (medida bidimensional) del paralelogramo curvilíneo Δ' tiene la forma

$$|\Delta'| = (|D(x)| + \varepsilon_\Delta) h^2,$$

donde la magnitud ε_Δ tiende a cero cuando $h \to 0$ y, además, uniformemente para todos los cuadraditos Δ. Para cada cuadradito Δ la magnitud ε_Δ depende de Δ y tiende a cero cuando $h \to 0$. La uniformidad de la tendencia se manifiesta en que para todo $\varepsilon > 0$ se puede indicar tal $\delta > 0$ que

$$|\varepsilon_\Delta| < \varepsilon, \ \forall \Delta \text{ cuando } h < \delta.$$

Examinemos la suma integral de la función $f(x')$ que corresponde a la partición de Ω', como se muestra en la fig. 41. En este caso tomamos la suma de Δ' «completos», o sea, de tales que correspondan a los cuadrados Δ pertenecientes por completo a Ω ($\Delta \subset \Omega$). Entonces

$$\sum{}' f(x') |\Delta'| = \sum{}' f[\varphi(x), \psi(x)] [|D(x)| + \varepsilon_\Delta] h^2 =$$

$$= \sum{}' f[\varphi(x), \psi(x)] |D(x)| h^2 + r_n \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega f[\varphi(x), \psi(x)] |D(x)| dx.$$

Aquí x' es un punto arbitrario perteneciente a Δ' ($x' \in \Delta'$) y x es el punto que, con ayuda de (1), le corresponde y pertenece, evidentemente, a Δ ($x \in \Delta$). El signo $\sum'$ significa que la suma concierne a los cuadrados completos Δ ($\Delta \subset \Omega$). Luego

$$|r_n| = \left| \sum{}' f[\varphi(x), \psi(x)] \varepsilon_\Delta h^2 \right| \leqslant M\varepsilon \sum{}' h^2 \leqslant M \cdot \varepsilon m\Omega$$

$$(M \geqslant |f[\varphi(x), \psi(x)]|),$$

de donde se ve que

$$r_n \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

De esta manera la fórmula (2) queda demostrada.

§ 2.8. Sistema polar de coordenadas en el plano

El rayo que sale del punto dado O se llama *eje polar* y el punto O se llama *polo* del sistema polar de coordenadas (fig. 44). El punto arbitrario A del plano tiene las coordenadas polares $(\rho, 0)$, donde

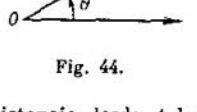

Fig. 44.

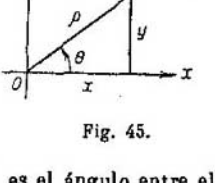

Fig. 45.

ρ es la distancia desde A hasta O y θ es el ángulo entre el vector (segmento dirigido) $\overrightarrow{OA}$ y el eje polar, ángulo que se lee a partir de este último en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Introduzcamos el sistema de coordenadas rectangulares x, y cuyo eje positivo x coincide con el eje polar (fig. 45).

El sistema de ecuaciones

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \tag{1}$$

realiza la transformación de las coordenadas polares en cartesianas (rectangulares). Los segundos miembros de las igualdades (1) son las funciones continuamente derivables con el jacobiano

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \geqslant 0. \tag{2}$$

La ecuación

$$\rho = \psi(\theta) \quad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2),$$

donde $\psi(\theta)$ es la función continua sobre el segmento $[\theta_1, \theta_2]$, determina en las coordenadas polares la curva Γ, o sea, el lugar geométrico de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen esta ecuación.

Supongamos que $0 < \theta_2 - \theta_1 \leqslant 2\pi$. Entonces la curva Γ es tal que todo rayo que sale del polo O bajo el ángulo θ al eje x, donde $\theta_1 < \theta < \theta_2$, corta Γ en un solo punto (fig. 46).

Asignemos en el plano (x, y) la región Ω limitada por los rayos $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ y por la curva Γ. En las condiciones mencionadas todo punto $(x, y) \in \Omega$ corresponde, con ayuda de las ecuaciones (1), sólo a un par (ρ, θ), donde $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Supongamos ahora que en la clausura $\bar{\Omega}$ de nuestra región Ω viene dada la función continua $f(x, y)$ de (x, y) o bien ella puede estar acotada sobre Ω y ser conti-

nua por doquier, salvo algunos puntos y algunas líneas suaves. Entonces tiene lugar la igualdad

$$\iint_{\Omega} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{0}^{\psi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\ \rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\,d\rho. \qquad (3)$$

Con arreglo a la fórmula (2) del § 2.7 hemos sustituido x, y por ρ, θ mediante las igualdades (1) y hemos introducido como factor el

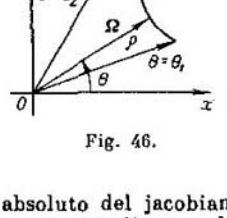

Fig. 46.

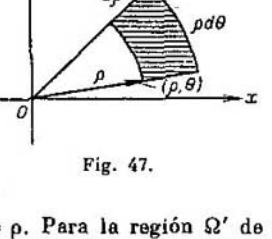

Fig. 47.

valor absoluto del jacobiano $|\rho| = \rho$. Para la región Ω' de pares (ρ, θ), correspondiente a la región inicial Ω, se han determinado ya los límites: primero integramos respecto a ρ entre 0 y $\psi(\theta)$ y luego respecto a θ entre θ_1 y θ_2.

EJEMPLO 1.

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} \exp(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \exp\rho^2\rho\,d\rho =$$

$$= \pi \int_0^R \exp\rho^2\,d(\rho^2) = (u=\rho^2) = \pi \int_0^{R^2} e^u\,du = \pi\,[e^{R^2}-1].$$

Hemos seguido la fórmula (3). Hay que tener en cuenta que la región que se define en las coordenadas cartesianas por la desigualdad $x^2+y^2<R^2$, en las coordenadas polares se define por la desigualdad $\rho<R$.

La fórmula (3) se puede obtener partiendo de las consideraciones naturales sin recurrir a la fórmula general (2) del § 2.7.

Vamos a partir el plano x, y en figuras elementales por unas circunferencias concéntricas cercanas y por unos rayos que salen del polo del sistema polar (fig. 47). El área de una figura elemental arbitraria (cerca del punto (ρ, θ)) o, como se dice, el elemento del área en las coordenadas polares vale con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior $\Delta s \sim \rho\,d\rho\,d\theta$ (la figura rayada en la fig. 47 se puede tomar aproximadamente por rectángulo de lados $d\rho$

y $\rho\, d\theta$). Por eso, si sumamos estos elementos, obtenemos

$$\lim_{\Delta\rho,\ \Delta\theta\to 0} \sum F_j \rho_j \Delta\rho_j \Delta\theta_j = \iint_{\Omega'} F(\rho,\ \theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta,$$

donde

$$F(\rho,\ \theta) = f(\rho\cos\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

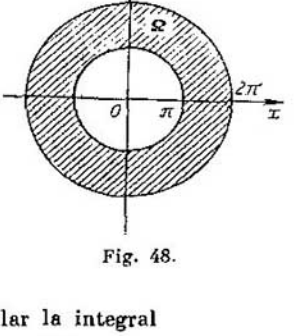

Fig. 48.

EJEMPLO 2. Calcular la integral

$$I = \iint_{\pi^2 < x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2} \mathrm{sen}\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

Pasando a las coordenadas polares (fig. 48), obtenemos

$$I = \int_0^{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{sen}\,\rho\cdot\rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \rho\,\mathrm{sen}\,\rho\, d\rho = (\rho = u,\ \mathrm{sen}\,\rho\, d\rho = dv) =$$

$$= 2\pi\left[-\rho\cos\rho\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos\rho\, d\rho\right] = -6\pi^2 + 2\pi\,\mathrm{sen}\,\rho\Big|_{\pi}^{2\pi} = -6\pi^2.$$

§ 2.9. Sistema polar de coordenadas en el espacio

El sistema de ecuaciones

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi,\quad y = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\quad z = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (1)$$

realiza el paso a partir de las *coordenadas polares (esféricas)* en el espacio a las cartesianas (fig. 49). Aquí ρ es la distancia entre el punto $P(x, y, z)$ y el origen de coordenadas (polo del sistema polar), θ es

el ángulo entre el radio vector ρ del punto P y su proyección sobre el plano (x, y) y φ es el ángulo entre la proyección mencionada y el sentido positivo del eje x. Se lee en el sentido en que es necesario girar alrededor del eje z el eje x para llegar al eje y por la vía más corta. Se puede considerar que $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ y $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

Las funciones del segundo miembro en (1) son continuamente derivables con el jacobiano

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho^2\cos\theta. \quad (2)$$

Sea σ una superficie que se describe en las coordenadas polares por la función $\rho = \psi(\Theta, \varphi)$ $((\Theta, \varphi) \in \omega)$ continua en la clausura

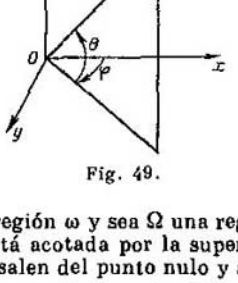

Fig. 49.

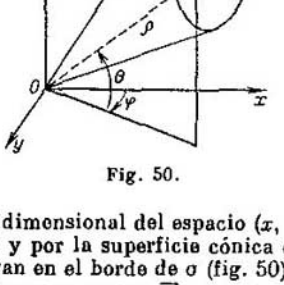

Fig. 50.

de la región ω y sea Ω una región tridimensional del espacio (x, y, z) que está acotada por la superficie σ y por la superficie cónica cuyos rayos salen del punto nulo y se apoyan en el borde de σ (fig. 50). Entonces para la función $f(x, y, z)$, continua sobre $\overline{\Omega}$, tiene lugar la igualdad

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\omega} d\theta\,d\varphi \int_{0}^{\psi(\theta, \varphi)} F(\rho, \theta, \varphi)\,\rho^2\cos\theta\,d\rho, \quad (3)$$

donde $F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\operatorname{sen}\theta)$. Hemos hecho uso de la fórmula general (3) del § 2.7, teniendo en cuenta las desigualdades (1) y (2). En el caso dado $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, por eso $\rho^2\cos\theta \geqslant 0$.

Para obtener de un modo evidente un elemento del volumen en las coordenadas polares debemos dividir el espacio en pequeñas partes mediante las superficies esféricas concéntricas que tienen como centro el polo polar (punto $\rho = 0$), mediante los planos que

pasan por el eje z y mediante las superficies cónicas que se definen por los ángulos θ y $\theta + d\theta$ (fig. 51) y tienen como eje el eje z. Es fácil ver que las pequeñas células obtenidas en este caso pueden considerarse, aproximadamente, como paralelepípedos rectangulares

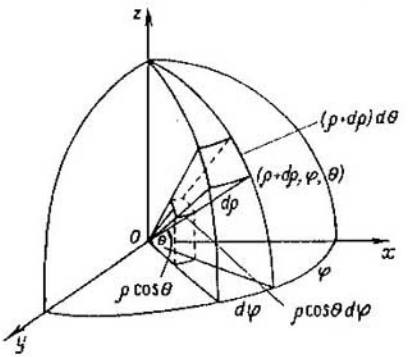

Fig. 51.

con aristas $\rho\, d\theta$, $d\rho$, $\rho \cos\theta\, d\varphi$, por eso su volumen, con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior, es

$$\Delta v = \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi,$$

donde (ρ, θ, φ) es uno de los puntos de la célula.

EJEMPLO. Calcular la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} xyz\, dx\, dy\, dz,$$

donde Ω es la región de puntos con coordenadas positivas, limitada por las superficies $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Introduzcamos las coordenadas polares (esféricas) por medio de las fórmulas (1), entonces para la región Ω: $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Con arreglo a la fórmula (3) tenemos

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_2^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^5 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi\, d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} -\cos\varphi\, d\cos\varphi \int_0^{\pi/2} -\cos^3\theta\, d\cos\theta \int_0^1 \rho^5\, d\rho =$$

$$= -\frac{\cos^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} \left(-\frac{\cos^4\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} \frac{\rho^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{48}.$$

§ 2.10. Coordenadas cilíndricas

Asignemos en el espacio tridimensional el sistema rectangular de coordenadas x, y, z. Un punto arbitrario $A = (x, y, z)$ del espacio se define asimismo por una tripleta de números (ρ, θ, z), donde z es su z-coordenada y (ρ, θ) son las coordenadas polares del punto

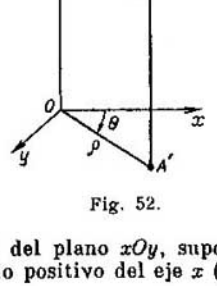

Fig. 52.

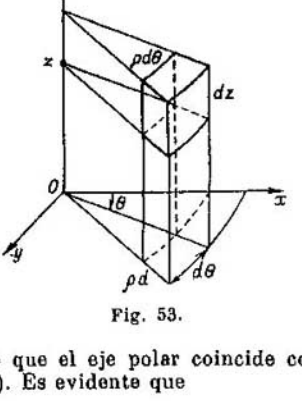

Fig. 53.

(x, y) del plano xOy, suponiendo que el eje polar coincide con el sentido positivo del eje x (fig. 52). Es evidente que

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\,\operatorname{sen}\theta, \\ z &= z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

El jacobiano de esta transformación

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\,\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \geqslant 0. \tag{2}$$

En este caso la fórmula de cambio de las variables se escribirá así:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega'} f[\rho\cos\theta,\ \rho\,\operatorname{sen}\theta,\ z]\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz.$$

Para obtener, de un modo evidente, un elemento del volumen en las coordenadas cilíndricas tendremos que partir el espacio mediante las superficies circulares cilíndricas concéntricas que tienen como eje el eje z, mediante los planos que pasan por el eje z y mediante otros que son paralelos al plano xOy (fig. 53). El elemento del espacio, limi-

tado por estas superficies con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior, no es más que un paralelepípedo rectangular con aristas $d\rho$, dz, $\rho\, d\theta$. Su volumen es igual a $\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$.

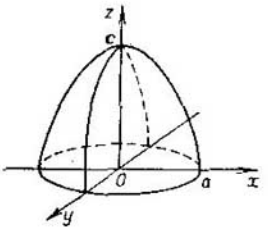

Fig. 54.

EJEMPLO. Hallar el volumen del cuerpo Ω limitado por las superficies

$$\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1,\quad z=0,\quad a,\ c>0 \qquad \text{(fig. 54)}.$$

Como sabemos,

$$V=m\Omega=\iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz.$$

Introduciendo las coordenadas cilíndricas (1), obtenemos

$$V=\iiint\limits_{\Omega'} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz=\int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi}\rho\, d\rho\, d\theta\int\limits_0^{c\left[1-\frac{\rho^4}{a^4}\right]} dz=$$

$$=2\pi c\int\limits_0^a \rho\left(1-\frac{\rho^4}{a^4}\right)d\rho=\frac{2}{3}\,\pi a^2 c.$$

§ 2.11. Area de una superficie

Asignemos en el espacio tridimensional $R=R_3$, donde está definido el sistema de coordenadas rectangulares (x, y, z), la superficie S descrita por la ecuación

$$z=f(x, y)\quad ((x, y)\in \overline{G}). \qquad (1)$$

Supongamos que G es una región limitada abierta del plano x, y con una frontera suave a trozos y la función f tiene las derivadas parciales continuas

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{2}$$

sobre $\overline{G}$. Cortemos $\overline{G}$ en partes que no se intersequen dos a dos, a no ser en sus fronteras (suaves a trozos),

$$\overline{G} = \sum_{j=1}^{N} G_j .$$

Sea (x_j, y_j) un punto arbitrario de G_j $(j = 1, \ldots, N)$. Le corresponde el punto $P_j \in S$ con las coordenadas (x_j, y_j, f_j), donde $f_j = f(x_j, y_j)$. Tracemos por el punto P_j un plano L_j tangente a S. Construyamos en la frontera de G_j, como en la directriz, la superficie cilíndrica Γ_j con una generatriz paralela al eje z. Esta superficie cortará en el plano tangente L_j un trozo l_j. Designemos el área de este trozo por $| l_j |$.

Por definición se llama *área de la superficie* S el límite

$$| S | = \lim_{\max d(G_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} | l_j | .$$

El coseno del ángulo agudo de la normal n_j a S en el punto P_j con el eje z es igual a

$$\cos(n_j, z) = 1/\sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2},$$

donde la raíz cuadrada se ha tomado con el signo + y p_j, q_j designan los resultados de la sustitución de los valores x_j, y_j en p, q. Pues, la ecuación del plano tangente tiene la forma[1])

$$(Z - z_j) - p_j (X - x_j) - q_j (Y - y_j) = 0$$

y, por consiguiente, la normal a éste se define por el vector $(-p_j, -q_j, 1)$. Es evidente que G_j es la proyección l_j sobre el plano x, y y, por lo tanto, el área (medida bidimensional) de G_j es igual a

$$| G_j | = | l_j | \cos(n_j, z),$$

$$| l_j | = | G_j | \sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2}$$

y

$$| S | = \lim_{\max d(G_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} | l_j | = \lim_{\max d(G_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2}\, | G_j | =$$

$$= \iint_G \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», §§ 8.7, 8.8.

puesto que la función $\sqrt{1+p^2+q^2}$ es continua sobre $\bar{G}$ y, por consiguiente, es integrable.

Hemos demostrado que el área de la superficie S descrita por la ecuación (1) se expresa por la fórmula

$$|S| = \iint_G \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dx\,dy. \tag{3}$$

Desde luego, si la superficie S está dada por la función

$$x = F(y, z) \quad ((y, z) \in H), \tag{1'}$$

que expresa explícitamente la dependencia de x respecto a y, z, entonces

$$|S| = \iint_H \sqrt{1+(F'_y)^2+(F'_z)^2}\,dy\,dz \tag{3'}$$

y si S se asigna por la función

$$y = \Phi(x, z) \quad ((x, z) \in \Lambda), \tag{1''}$$

entonces

$$|S| = \iint_\Lambda \sqrt{1+(\Phi'_x)^2+(\Phi'_z)^2}\,dx\,dz. \tag{3''}$$

EJEMPLO 1. Calcular el área de una parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, encerrada dentro del cilindro circular $x^2+y^2=b^2 (b \leqslant a)$.

En el caso dado $z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Sea G_b una cuarta parte del círculo de radio b que tiene por centro el origen de coordenadas (fig. 55). Conforme a (3), teniendo en cuenta la simetría, encontramos

$$|S_b| = 8\iint_{G_b} \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= 8\iint_{G_b} \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 8a\int_0^b\int_0^{\pi/2} \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}} =$$

$$= 2\pi a\left[-2(a^2-\rho^2)^{1/2}\right]_0^b = 4\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

Cuando $b = a$, las integrales de esta cadena deben entenderse en el sentido impropio (véase a continuación el § 2.13).

Transformemos la integral (3), haciendo en ella la sustitución

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad ((u, v) \in \bar{\Omega}) \tag{4}$$

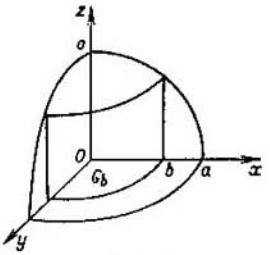

Fig. 55.

que pone en correspondencia biunívoca las regiones Ω y G, al suponer que φ y ψ son continuamente derivables sobre $\bar{\Omega}$ y el jacobiano

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \text{ sobre } \Omega. \tag{5}$$

Sustituyendo en la fórmula (1) las expresiones x e y de (4), obtenemos

$$z = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = \chi(u, v).$$

Entonces

$$\frac{\partial \chi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u},$$
$$\frac{\partial \chi}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Resolviendo estas ecuaciones respecto a $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ y teniendo en cuenta (5), obtenemos

$$p = -\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \Big/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad q = -\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \Big/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Por eso, aplicando a la integral (3) la fórmula sobre el cambio de las variables (2) del § 2.7, obtenemos

$$|S| = \iint_G \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy =$$
$$= \iint_\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \Big/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \Big/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2} \times$$
$$\times \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\, dv. \tag{6}$$

Ahora bien, el área de la superficie S se expresa asimismo por la fórmula

$$|S| = \iint_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2}\, du\, dv. \quad (7)$$

La superficie suave S se puede asignar paramétricamente, por tres ecuaciones

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in \Omega, \quad (8)$$

donde las funciones x, y, z tienen las derivadas parciales continuas en la clausura $\bar{\Omega}$ de la región Ω de los valores (u, v) llamados parámetros de S. Con ello se supone que el rango de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\| \quad (9)$$

es igual a 2 para todos los puntos $(u, v) \in \Omega$. Esto muestra que tiene lugar la inecuación

$$\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 > 0,\ \forall (u, v) \in \Omega. \quad (10)$$

En efecto, esta inecuación expresa el hecho de que para todo $(u, v) \in \Omega$ al menos uno de los términos de la suma del primer miembro de (10) no es igual a cero lo que equivale a que uno de los determinantes de segundo orden, engendrados por la matriz (9), no es igual a cero.

Notemos que tres ecuaciones (8) de la superficie S pueden ser escritas en la forma vectorial:

$$r(u, v) = x(u, v)\, i + y(u, v)\, j + z(u, v)\, k, \quad (11)$$

donde, por lo tanto, el vector $r = r(u, v)$ (radio vector del punto de la superficie S) depende de dos parámetros escalares u y v.

Derivando la igualdad (11) respecto a u y respecto a v, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} r_u &= \frac{\partial x}{\partial u}\, i + \frac{\partial y}{\partial u}\, j + \frac{\partial z}{\partial u}\, k, \\ r_v &= \frac{\partial x}{\partial v}\, i + \frac{\partial y}{\partial v}\, j + \frac{\partial z}{\partial v}\, k. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\dot{r}_u \times \dot{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) i +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) j + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) k =$$

$$= i \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + j \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + k \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad (13)$$

o sea, el cuadrado de la longitud del vector $\dot{r}_u \times r_v$ resulta igual al primer miembro de (10)!

$$|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|^2 = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right)^2.$$

Las ecuaciones

$$x = \cos\theta \cos\varphi, \quad y = \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = \operatorname{sen}\theta$$

definen la superficie esférica de radio 1 que tiene por centro el punto nulo ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$). De aquí vemos que toda la superficie esférica puede ser asignada en forma paramétrica por ecuaciones únicas. En forma explícita, o sea, en una de las formas (1), (1'), (1") la superficie esférica en conjunto, como es evidente, no puede ser representada. Sólo algunos trozos de la superficie esférica, si ésta se proyecta unívocamente sobre uno u otro plano de coordenadas, pueden ser descritos en la forma explícita.

Por otro lado, la superficie S representada paramétricamente por las ecuaciones (8) siempre puede expresarse explícitamente, pero sólo de un modo local. En efecto, asignemos un punto cualquiera $A \in S$ que corresponda a los parámetros (u_0, v_0). En virtud de la condición (10) uno de los sumandos del primer miembro de (10) en este punto es mayor de cero, supongamos que tal es el primer sumando. Entonces en el entorno (u_0, v_0) se pueden resolver las dos primeras ecuaciones de (8) respecto a u y v y obtener

$$u = \lambda(x, y), \quad v = \mu(x, y).$$

Sustituyendo estas funciones en la tercera ecuación de (8), obtenemos que cierto trozo σ de la superficie S, que contiene el punto A, se describe explícitamente por la ecuación

$$z = f(x, y).$$

De aquí vemos que la representación paramétrica de la superficie es más general que la explícita.

Si la superficie S está representada paramétricamente por las ecuaciones (8), entonces, por definición, se llama área de la misma el número igual a

$$|S| = \iint\limits_{\Omega} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv. \tag{14}$$

Notemos que a cada región ω perteneciente a Ω le corresponde, con ayuda de las ecuaciones (8), cierta superficie $\sigma \subset S$. Esta es un trozo de la superficie S. Conforme a la definición (14) el área de σ es igual a

$$|\sigma| = \iint\limits_{\omega} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv. \tag{15}$$

Claro está que si σ se corta en dos trozos σ_1, σ_2 por las regiones respectivas ω_1, ω_2 ($\overline{\omega} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}$), entonces

$$|\sigma| = \iint\limits_{\omega} |r_u \times r_v| \, du \, dv = \iint\limits_{\omega_1} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv + \\ + \iint\limits_{\omega_2} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv = |\sigma_1| + |\sigma_2|.$$

Esto muestra que la definición (14) posee una propiedad natural: el área del trozo σ de la superficie S es igual a la suma de las áreas de los trozos σ_1 y σ_2 en los cuales este trozo ha sido partido.

Notemos asimismo que si la definición (14) del área $|\sigma|$ se aplica al trozo σ que se proyecta unívocamente sobre uno u otro plano de coordenadas, ella es equivalente a la definición inicial del área de tal trozo ((3), (3′) ó (3″)). Esto ha sido demostrado anteriormente (véase (6)).

EJEMPLO 1. Hallar el área de la superficie representada paramétricamente:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi, \quad z = b\varphi,$$
$$0 < r < a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

La superficie dada se llama *helicoide*. Calculemos los jacobianos:

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r, \quad \frac{D(x, z)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \operatorname{sen} \varphi \\ 0 & b \end{vmatrix} = b \cos \varphi,$$

$$\frac{D(y, z)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \varphi & r \cos \varphi \\ 0 & b \end{vmatrix} = b \operatorname{sen} \varphi.$$

Luego

$$\left[\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)}\right]^2 + \left[\frac{D(y, z)}{D(r, \varphi)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, z)}{D(r, \varphi)}\right]^2 = r^2 + b^2.$$

Por eso, basándonos en la fórmula (7), tenemos

$$|S| = \iint_{\Omega} \sqrt{r^2+b^2}\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \sqrt{r^2+b^2}\, dr\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{a} \sqrt{r^2+b^2}\, dr = 2\pi \left[\frac{r}{2} \sqrt{r^2+b^2} + \frac{b^2}{2} \ln \left(r + \sqrt{r^2+b^2}\right) \right]_0^{a} =$$

$$= \pi \left[a \sqrt{a^2+b^2} + b^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} \right].$$

§ 2.12. Coordenadas del centro de masas

Supongamos que en el espacio en el que se encuentra el sistema rectangular de coordenadas está dado un punto material $P = (x_1, x_2, x_3)$ de masa M_P. El producto $M_P \cdot x_l$ se llama *momento estático* de este *punto* respecto al plano $x_l = 0$ y se designa por el símbolo

$$K_{x_l} = M_P x_l.$$

El momento estático respecto al plano $x_l = 0$ de un sistema finito de puntos materiales $P_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$ de masas M_j se define por la igualdad

$$K_{x_l} = \sum_j M_j x_l^{(j)}.$$

Por último, si la masa queda distribuida sobre cierto conjunto G, el *momento estático del cuerpo* G respecto al plano $x_l = 0$ se define como la integral

$$K_{x_l} = \int_G \rho(P)\, x_l\, dG = \int_G \rho(P)\, x_l\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

donde $\rho(P)$ es la densidad de distribución de la masa.

El centro de gravedad P^c del cuerpo G tiene las coordenadas (x_1^c, x_2^c, x_3^c) que se definen por las igualdades

$$x_i^c = \int_G x_i \rho(P)\, dG \Big/ \int_G \rho(P)\, dG \quad (i = 1, 2, 3).$$

En particular, si $n = 2$ y G es un trapecio curvilíneo en el plano (x_1, x_2), trapecio que esté limitado superiormente por el gráfico de

la función $x_2 = f(x_1)$ e inferiormente por el eje x_1 y lleno uniformemente de masas con densidad $\rho \equiv 1$, entonces (fig. 56)

$$x_2^c = \frac{\int\limits_G x_2\,dx_1\,dx_2}{\int\limits_G dx_1\,dx_2} = \frac{\int\limits_a^b dx_1 \int\limits_0^{f(x_1)} x_2\,dx_2}{mG} = \frac{1}{2mG}\int\limits_a^b f^2(x_1)\,dx_1.$$

De aquí

$$2\pi x_2^c \cdot mG = \pi \int\limits_a^b f^2(x_1)\,dx_1. \qquad (1)$$

En el segundo miembro de (1) está el volumen de un cuerpo obtenido por la revolución del trapecio curvilíneo G alrededor del eje x_1.

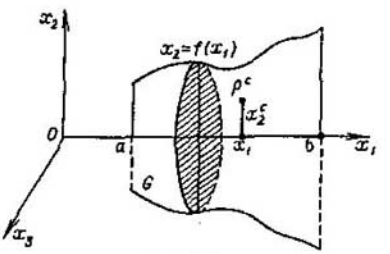

Fig. 56.

Así, pues, hemos obtenido el conocido **teorema de Guldin**[1]) que dice: *el volumen del cuerpo de revolución es igual al área del trapecio curvilíneo G multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de masas (de gravedad) de este trapecio alrededor del eje* x_1.

Si G es la curva $x_2 = f(x_1)$, $a \leqslant x_1 \leqslant b$, uniforme ($\rho \equiv 1$), entonces

$$x_2^c = \frac{\int\limits_G x_2\,dl}{mG} = \frac{\int\limits_G f(x_1)\,dl}{mG},$$

donde mG es la longitud de la curva dentro de los límites de $[a, b]$ y dl, el elemento de la longitud del arco. Puesto que $dl =$

[1]) P. Guldin (1577—1643), matemático suizo.

$= \sqrt{1 + f'(x_1)^2}\, dx_1$, entonces

$$x_2^c = \frac{1}{mG} \int_a^b f(x_1) \sqrt{1 + f'(x_1)^2}\, dx_1$$

o bien

$$2\pi x_2^c mG = 2\pi \int_a^b f(x_1) \sqrt{1 + f'(x_1)^2}\, dx. \qquad (2)$$

En el segundo miembro (2) se encuentra el área de la superficie de revolución de la curva G ($x_2 = f(x_1)$, $a \leqslant x_1 \leqslant b$) alrededor del eje x_1. Ahora bien, la igualdad (2) ofrece el **otro teorema de Guldin**

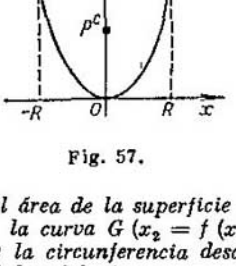

Fig. 57.

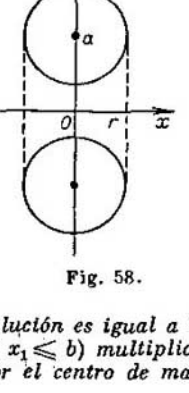

Fig. 58.

que reza: *el área de la superficie de revolución es igual a la longitud del arco de la curva G ($x_2 = f(x_1)$, $a \leqslant x_1 \leqslant b$) multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de masas de esta curva alrededor del eje x_1.*

Los teoremas de Guldin permiten encontrar a partir de dos magnitudes conocidas la tercera. Por ejemplo, si se conocen las coordenadas del centro de gravedad y el volumen del cuerpo de revolución, se puede determinar el área del trapecio curvilíneo, etc.

EJEMPLO 1. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del trapecio curvilíneo $G = \{-R \leqslant x \leqslant R,\ x^2 \leqslant y \leqslant R^2\}$ (fig. 57).

Sea $P^c = (x^c, y^c)$ el centro de gravedad. En virtud de la simetría es claro que $x^c = 0$ (suponemos que $\rho \equiv 1$). Hallemos el área del trapecio G:

$$mG = R^2 \cdot 2R - 2 \int_0^R x^2\, dx = 2R^3 - \frac{2}{3} R^3 = \frac{4}{3} R^3.$$

El volumen del cuerpo obtenido por la revolución de G alrededor del eje x es igual a

$$V = 2R \cdot \pi R^4 - 2\pi \int_0^R (x^2)^2\, dx = 2\pi R^5 - \frac{2}{5}\, \pi R^5 = \frac{8}{5}\, \pi R^5.$$

Sobre la base del primer teorema de Guldin

$$y^c = \frac{V}{2\pi mG} = \frac{3}{5}\, R^2.$$

EJEMPLO 2. Hallar el volumen del cuerpo obtenido por la revolución del círculo $G = \{x^2 + (y - a)^2 \leqslant r^2\}$ de radio r $(r \leqslant a)$ que tiene por centro el punto $(0, a)$, en torno al eje x (fig. 58).

Es claro que el centro de gravedad del círculo (homogéneo) coincide con su centro geométrico, o sea, $x^c = 0$, $y^c = a$. El área del círculo $mG = \pi r^2$. Por eso, conforme al primer teorema de Guldin,

$$V = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 a.$$

EJEMPLO 3. Hallar el área de la superficie del cuerpo de revolución examinado en el ejemplo 2.

La superficie dada puede ser considerada como superficie obtenida por la revolución de la circunferencia $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ alrededor del eje x. La longitud de esta circunferencia es igual a $2\pi r$. Por eso, conforme al segundo teorema de Guldin,

$$S = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$$

(el centro de gravedad de la circunferencia homogénea coincide asimismo con el centro $(0, a)$ de esta circunferencia).

EJEMPLO 4. Hallar el centro de gravedad del semicírculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y > 0$, homogéneo $(\rho \equiv 1)$; de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, $y > 0$.

Es sabido que el volumen de una esfera de radio R es igual a $\frac{4}{3}\, \pi R^3$ y el área de su superficie es igual a $4\pi R^2$. Por la fórmula (1) obtenemos (fig. 59)

$$2\pi y^c_{sc} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\, \pi R^3, \quad y^c_{sc} = \frac{4R}{3\pi},$$

donde y^c_{sc} es la ordenada del centro de gravedad del semicírculo.

Por la fórmula (2) para la ordenada y^c_{sf} del centro de gravedad de la semicircunferencia tenemos

$$2\pi y^c_{sf} \cdot \pi R = 4\pi R^2, \quad y^c_{sf} = \frac{2R}{\pi}.$$

MOMENTOS. Se llama *momento de q-ésimo orden* ($q = 2, 3, \ldots$) del punto material P de masa M_p respecto al plano $x_i = 0$ el producto

$$I_{x_i}^{(q)} = M_p x_i^q.$$

Si las masas están distribuidas sobre un conjunto medible G de densidad $\rho(P)$, entonces

$$I_{x_i}^{(q)} = \int_G x_i^q \rho(P)\, dG \quad (i = 1, 2, 3).$$

Si $q = 2$, el momento respectivo de segundo orden se denomina *momento de inercia*.

Además, pueden examinarse los momentos de q-ésimo orden del cuerpo G respecto al origen de coordenadas

$$I_0^{(q)} = \int_G \rho(P) \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \right)^{q/2} dG;$$

respecto al eje x_i ($i = 1, 2, 3$). Por ejemplo, el momento de q-ésimo orden respecto al eje x_1 se escribirá así:

$$I_{x_1 x_1}^{(q)} = \int_G \rho(P)\, (x_2^2 + x_3^2)^{q/2}\, dG.$$

§ 2.13. Integrales impropias [1]

Supongamos que la función $u = f(x)$ está dada sobre la región cerrada $\bar{G}$ ($\bar{G} = G \cup \partial G$). El punto $x^0 \in G$ se llama *punto singular* de la

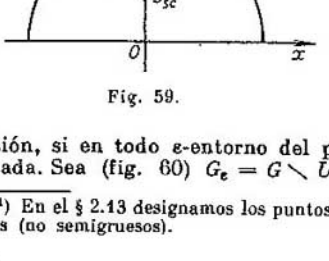

Fig. 59.

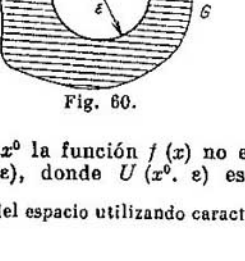

Fig. 60.

función, si en todo ε-entorno del punto x^0 la función $f(x)$ no está acotada. Sea (fig. 60) $G_\varepsilon = G \setminus U(x^0, \varepsilon)$, donde $U(x^0, \varepsilon)$ es la

[1] En el § 2.13 designamos los puntos x, y del espacio utilizando caracteres claros (no semigruesos).

esfera abierta de radio ε que tiene por centro el punto x^0 ($\rho(x, x^0) = |x - x^0| < \varepsilon$.

Si la función $f(x)$ tiene un único punto singular x^0 sobre la región $\overline{G}$ y es continua sobre la región G_ε para $\forall \varepsilon > 0$, entonces se llama *integral impropia* de la función $f(x)$ sobre G el límite (si éste existe)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{G_\varepsilon} f(x)\, dx = \int_G f(x)\, dx. \tag{1}$$

Si el límite finito (1) existe, la *integral impropia converge* y si el límite (1) no existe o es igual al infinito, la integral impropia *diverge*.

La integral (1) se denomina *absolutamente convergente*, si converge la integral

$$\int_G |f(x)|\, dx < \infty \tag{2}$$

del valor absoluto $|f(x)|$.

Una integral absolutamente convergente converge. En efecto, de la convergencia absoluta de la integral (2) se deduce que el límite $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{G_\varepsilon} |f(x)|\, dx$ existe y es finito. Entonces, aplicando a este límite el criterio de Gauchy (respecto a la función de una variable ε), obtenemos que para todo valor de $\eta > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\eta > \left| \int_{G_\varepsilon} |f|\, dx - \int_{G_{\varepsilon'}} |f|\, dx \right| = \int_{G_\varepsilon \setminus G_{\varepsilon'}} |f|\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \left| \int_{G_\varepsilon \setminus G_{\varepsilon'}} f\, dx \right| \geqslant \left| \int_{G_\varepsilon} f\, dx - \int_{G_{\varepsilon'}} f\, dx \right|,$$

$$\forall\, \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon^0.$$

De suerte, para todo valor de $\eta > 0$ existe un valor de ε_0, tal que para todos los números positivos ε, ε' que satisfagan las desigualdades $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_0$ tiene lugar

$$\left| \int_{G_\varepsilon} f\, dx - \int_{G_{\varepsilon'}} f\, dx \right| < \eta.$$

Esto muestra, según el criterio de Cauchy, que existe el límite (1), o sea, existe la integral impropia (1).

EJEMPLO 1. Investigar la convergencia de la integral

$$\int_\Omega |x|^{-\alpha}\, dx, \tag{3}$$

donde $\alpha > 0$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, Ω es la esfera unidad $|x| \leqslant 1$.

RESOLUCION. La función $|x|^{-\alpha}$ tiene un único punto singular (0, 0, 0). Por eso, pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$\int_{\Omega} |x|^{-\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1} |x|^{-\alpha}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\varepsilon}^{1} r^2 \cos\theta \cdot r^{-\alpha}\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi \int_{\varepsilon}^{1} r^{2-\alpha}\,dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{4\pi}{3-\alpha} r^{3-\alpha}\Big|_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{4\pi}{3-\alpha}(1-\varepsilon^{3-\alpha}) = \begin{cases} 4\pi/(3-\alpha), & \alpha < 3, \\ \infty & \alpha > 3. \end{cases}$$

Hemos demostrado que la integral (3) converge cuando $\alpha < 3$. Si $\alpha > 3$, la integral (3) diverge. Para $\alpha = 3$ la integral (3) asimismo diverge (al calcular la integral respecto a r la primitiva es igual a $\ln r$).

Observación 1. En un espacio de n dimensiones, o sea, cuando $|x|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$ la integral (3) converge para $\alpha < n$ y diverge para $\alpha \geqslant n$.

Si la región G no está acotada y la función $f(x)$ es continua sobre la región $G_R = G \cdot U(O, R)$ para cualquier R (fig. 61), entonces el número igual al límite

$$\lim_{R \to \infty} \int_{G_R} f(x)\,dx = \int_{G} f(x)\,dx \tag{4}$$

se llama *integral impropia respecto a la región no acotada G.*

EJEMPLO 2. La integral $\int_G |x|^{-\alpha}\,dx$, donde $G = E^3 \setminus U(O, 1)$, converge cuando $\alpha > 3$ y diverge cuando $\alpha \leqslant 3$.

Realizando los cálculos, al igual que en el ejemplo 1, obtenemos

$$\int_G |x|^{-\alpha}\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{G_R} |x|^{-\alpha}\,dx =$$

$$= \lim_{R \to \infty} 2\pi \int_1^R r^{-\alpha+2}\,dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = \lim_{R \to \infty} \frac{4\pi}{3-\alpha}(R^{3-\alpha} - 1) =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \alpha < 3, \\ 4\pi/(\alpha-3), & \alpha > 3. \end{cases}$$

Cuando $\alpha = 3$

$$\int_G |x|^{-\alpha}\, dx = \lim_{R\to\infty} 4\pi \int_1^R r^{-1}\, dr = \lim_{R\to\infty} 4\pi \ln R = \infty.$$

Observación 2. En el espacio de n dimensiones la integral

$$\int_G |x|^{-\alpha}\, dx, \quad G = E^n \setminus U(O, 1)$$

converge para $\alpha > n$ y diverge para $\alpha \leqslant n$.

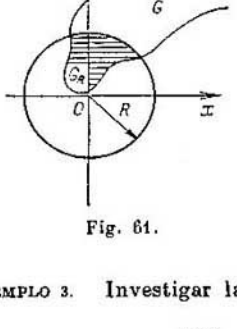

Fig. 61.

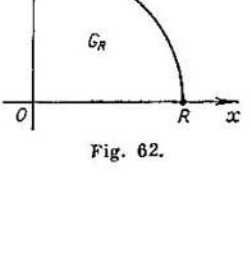

Fig. 62.

EJEMPLO 3. Investigar la integral

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1\, dx_2.$$

Por definición tenemos

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{G_R} \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1\, dx_2,$$

donde $G_R = \{|x| \leqslant R,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$ es una cuarta parte del círculo de radio R (fig. 62). Pasando a las coordenadas polares

$$x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\operatorname{sen}\varphi \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ 0 < r < R\right),\ \frac{D(x_1, x_2)}{D(r, \varphi)} = r,$$

tenemos

$$\int_{G_R} \exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \exp(-r^2)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^R \exp(-r^2)\,\frac{dr^2}{2} = \frac{-\pi}{4} \exp(-r^2)\Big|_0^R =$$

$$= \frac{\pi}{4}\,[1-\exp(-R^2)] \to \frac{\pi}{4}, \quad R \to \infty.$$

Ahora bien,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1\,dx_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Pero

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x_1^2-x_2^2}\,dx_1\,dx_2 = \left(\int_0^\infty e^{-x_1^2}\,dx_1\right)\left(\int_0^\infty e^{-x_2^2}\,dx_2\right) = \left(\int_0^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi\right)^2,$$

donde la integral impropia de una variable del segundo miembro (*integral de Poisson*) converge. Pór eso obtenemos

$$\int_0^\infty \exp(-\xi^2)\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

EJEMPLO 4. Calcular la integral

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha x^2)\,(2\alpha x^2+1)^{-2}\,dx \quad (\alpha > 0).$$

Integrando dos veces por partes, tenemos

$$\int_\varepsilon^N e^{-\alpha x^2}(2\alpha x^2+1)^{-2}\,dx = \left(u = \frac{e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x},\ dv = \frac{4\alpha x\,dx}{(2\alpha x^2+1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x\,(2\alpha x^2+1)}\Big|_\varepsilon^N + \int_\varepsilon^N \frac{1}{2\alpha x^2+1}\,e^{-\alpha x^2}\,\frac{(-2\alpha x^2-1)}{4\alpha x^2}\,dx =$$

$$= \frac{-e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x\,(2\alpha x^2+1)}\Big|_\varepsilon^N - \int_\varepsilon^N e^{-\alpha x^2}\,\frac{dx}{4\alpha x^2} = \left(u = e^{-\alpha x^2},\ dv = \frac{dx}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{-e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x\,(2\alpha x^2+1)}\Big|_\varepsilon^N - \frac{1}{4\alpha}\left[-e^{-\alpha x^2}\,\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^N - 2\alpha \int_\varepsilon^N e^{-\alpha x^2} x\,\frac{dx}{x}\right] =$$

$$= \frac{x}{2}\,\frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha x^2+1}\Big|_\varepsilon^N + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^N e^{-\alpha x^2}\,dx.$$

Pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$ y $N \to \infty$, tendremos

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}(2\alpha x^2+1)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \left(\sqrt{\alpha}\,x = z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-z^2}\,\frac{dz}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

§ 2.14. Integral impropia con particularidades a lo largo de la línea

Supongamos que la función $F(x, y)$ es continua sobre el círculo abierto

$$G_a = \{x^2 + y^2 < a^2\} \quad (a > 0),$$

pero no está acotada sobre éste. Además, suponemos que al aproximarse a cualesquiera puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ la función F tiende hacia el infinito.

Entonces para todo número positivo $b < a$ la integral

$$\iint_{G_b} F(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\overline{G}_b} F(x, y)\,dx\,dy$$

existe, pero la integral de F sobre G_a no existe en el sentido habitual (de Riemann). Es que sabemos que de la existencia de la integral respecto a G_a en el sentido de Riemann debe deducirse la acotación de F sobre G_a.

Sin embargo, puede suceder que existe el límite

$$\lim_{\substack{b\to a\\ b<a}} \iint_{G_b} F(x, y)\,dx\,dy = I.$$

El límite I se llama *integral de F respecto a G_a en el sentido impropio* y se designa como integral habitual de Riemann:

$$I = \iint_{G_a} F(x, y)\,dx\,dy.$$

Con esta situación ya nos hemos encontrado al examinar el ejemplo 1 en el § 2.11. La función subintegral de la integral allí representada es continua sobre el círculo abierto G_a, pero no está acotada sobre G_a.

Tuvimos que determinar el área de la esfera $|S_a|$, correspondiente a G_a, no con ayuda de una integral habitual de Riemann

$$|S_a| = \lim_{b\to a} \iint_{G_b} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{G_a} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Acabamos de examinar el ejemplo de una integral impropia cuando la función subintegral no está acotada a lo largo de la línea. En el caso precedente hemos citado los ejemplos de las integrales impropias cuando la función subintegral no está acotada en el entorno de un punto.

§ 2.15. Integral impropia dependiente de un parámetro [1]

Examinemos la integral impropia

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y)\, dy =$$

$$= \int \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \dots dy_n \quad (1)$$

que depende del parámetro $x = (x_1, \dots, x_m)$. Supongamos que la integral tiene una sóla particularidad en el punto $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0) \in \overline{\Omega}$.

Examinemos más exactamente la región Ω de puntos $y = (y_1, \dots, y_n)$ del espacio de n dimensiones respecto a la cual se efectúa la integración y la región G de puntos $x = (x_1, \dots, x_m)$, o sea, la región de parámetros. Puesto que integramos respecto a Ω y a continuación integraremos también respecto a G, supondremos que ambas regiones Ω y G están limitadas y tienen una frontera suave a trozos. En lo que se refiere a la función $f(x, y)$, se supone que es continua sobre $\overline{G} \times \overline{\Omega}$ [2] a excepción de los puntos (x, y^0) donde ella tiene la particularidad.

En general, sobre Ω en el entorno de cada punto (x, y^0) la función $f(x, y)$ no está acotada.

Supongamos que la integral impropia (1) existe para todos los valores de $x \ni \overline{G}$. Esto significa que para cada $x \in \overline{G}$ existe el límite finito

$$F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y)\, dy = \int_{\Omega} f(x, y)\, dy, \quad (2)$$

donde

$$F_\varepsilon(x) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y)\, dy \quad (3)$$

---

[1] En el § 2.15 hemos designado los puntos x, y del espacio, utilizando caracteres claros (no semigruesos).

[2] El símbolo $G \times \Omega$ designa el producto directo de los conjuntos G y Ω, o sea, el conjunto de todos los pares (x, y), donde $x \in G$, $y \in \Omega$.

y $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus U(y^0, \varepsilon)$ es el conjunto de los puntos $y \in \Omega$ de los cuales ha sido eliminada la esfera de radio que tiene por centro el punto y^0.

Es importante señalar que la integral (3) es una integral habitual (propia) de Riemann y ya que la función $f(x, y)$ es continua sobre $\bar{G} \times \Omega_\varepsilon$ para todo valor de $\varepsilon > 0$, para esta integral se cumplen las propiedades conocidas, a saber:

1) $F_\varepsilon(x)$ es una función continua de $x \in \bar{G}$.

2) Es legítimo cambiar de lugar el orden de integración

$$\int_G dx \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y)\, dy = \int_{\Omega_\varepsilon} dy \int_G f(x, y)\, dx. \tag{4}$$

3) Es legítimo derivar bajo el signo de la integral

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y)\, dy = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)\, dy \tag{5}$$

a la condición adicional de que la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)$ sea continua sobre $\bar{G} \times \Omega_\varepsilon$

De aquí surge la pregunta ¿se conservan o no las propiedades 1)—3) para $\varepsilon = 0$, o sea, se conservan o no estas propiedades para la integral impropia (1)? Hablando en general, esto no es así. No obstante, si sobre la convergencia de $F_\varepsilon(x)$ hacia $F(x)$ y de $\frac{\partial}{\partial x_j} F_\varepsilon$ hacia $\frac{\partial}{\partial x_j} F$ se impone la condición adicional de convergencia uniforme, entonces las propiedades 1)—3) se mantienen. Por esta razón es útil el concepto de convergencia uniforme de una integral impropia.

Por definición, la *integral* (1) *converge uniformemente sobre* $\bar{G}$ *(o respecto a* $x \in \bar{G}$*) si*

$$F_\varepsilon(x) \to F(x) \quad (\varepsilon \to 0),$$

o sea,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y)\, dy \to \int_{\Omega} f(x, y)\, dy \quad (\varepsilon \to 0)$$

uniformemente sobre $\bar{G}$.

Con otras palabras, la integral (1) *converge uniformemente sobre* $\bar{G}$ *si se cumple la condición siguiente: para todo valor de* $\eta > 0$ *existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que*

$$|F(x) - F_\varepsilon(x)| = \left| \int_{\Omega} f(x, y)\, dy - \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y)\, dy \right| =$$

$$= \left| \int_{\Omega \cap U(y^0, \varepsilon)} f(x, y)\, dy \right| < \eta, \quad \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \forall\, x \in \bar{G}.$$

A las integrales uniformemente convergentes se les puede aplicar la teoría de sucesiones uniformemente convergentes de las funciones, vinculada con la teoría de series uniformemente convergentes.

Sabemos que si la sucesión de las funciones $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ continuas sobre el conjunto $\overline{G}$ converge uniformemente sobre $\overline{G}$, la función límite $F(x)$ es continua sobre $\overline{G}$ y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\overline{G}} F_n(x)\,dx = \int_{\overline{G}} F(x)\,dx. \tag{6}$$

Sabemos también que si adicionalmente suponemos que las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x_j} F_n(x)$ existen y son continuas sobre $\overline{G}$ y, además,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_n(x) \rightrightarrows \psi(x), \quad x \in \overline{G},$$

uniformemente sobre $\overline{G}$, la función $F(x)$ tiene la derivada $\frac{\partial}{\partial x_j} F(x)$ igual a $\psi(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \psi(x), \quad \forall\, x \in \overline{G}.$$

Al demostrar estas propiedades no tiene importancia el hecho de que n, creciendo, recorra los números naturales. Se puede considerar asimismo que $n = \varepsilon$ tiende continuamente a cero $(\varepsilon \to 0)$. Por eso las propiedades indicadas se extienden de manera automática a las integrales impropias uniformemente convergentes.

TEOREMA 1. *Si la integral* (1) *converge uniformemente sobre* $\overline{G}$ *y la función* $f(x, y)$ *es continua sobre* $\overline{G} \times \overline{\Omega}$, *a excepción de los puntos* (x, y^0), *entonces la integral* (1) *será una función continua de* x. *En este caso*

$$\int_{\overline{G}} dx \int_{\overline{\Omega}} f(x, y)\,dy = \int_{\overline{\Omega}} dy \int_{\overline{G}} f(x, y)\,dx.$$

En efecto, de la continuidad $F_\varepsilon(x)$, $\forall \varepsilon > 0$, y de la convergencia uniforme $F_\varepsilon(x) \rightrightarrows F(x)$, $\varepsilon \to 0$, sobre $\overline{G}$ se deduce que $F(x)$ es continua sobre $\overline{G}$. Luego,

$$\int_{\overline{G}} dx \int_{\overline{\Omega}} f(x, y)\,dy = \int_{\overline{G}} F(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\overline{G}} F_\varepsilon(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\overline{G}} dx \int_{\overline{\Omega}_\varepsilon} f(x, y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\overline{\Omega}_\varepsilon} dy \int_{\overline{G}} f(x, y)\,dx =$$

$$= \int_{\overline{\Omega}} dy \int_{\overline{G}} f(x, y)\,dx.$$

En esta cadena hemos hecho uso (en la segunda igualdad) de la fórmula

$$\int_G F_\varepsilon(x)\,dx \to \int_G F(x)\,dx, \quad (\varepsilon \to 0),$$

que es justa, porque F_ε y F son continuas sobre G y $F_\varepsilon \to F$ uniformemente sobre $\overline{G}$, y (en la cuarta igualdad) de la fórmula (4).

TEOREMA 2. *Si, además de cumplirse las condiciones del teorema* 1, *se conoce que la derivada parcial* $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)$ *es continua sobre* $\overline{G} \times \overline{\Omega}$, *a excepción de los puntos* (x, y^0), *y la integral*

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)\,dy$$

converge uniformemente sobre $\overline{G}$, *entonces tiene lugar la igualdad*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_\Omega f(x, y)\,dy = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)\,dy, \tag{7}$$

o sea, es legítimo derivar bajo el signo de la integral.

En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_\Omega f(x, y)\,dy = \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial}{\partial x_j} F_\varepsilon(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y)\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)\,dy = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)\,dy.$$

En la segunda igualdad de esta cadena se ha aplicado la propiedad que reza: si las funciones $F(x)$ y $\frac{\partial}{\partial x_j} F_\varepsilon(x)$ son continuas sobre $\overline{G}$ y ambas convergen uniformemente sobre $\overline{G}$ hacia $F(x)$ y $\psi(x)$, respectivamente, entonces $\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \psi(x)$ sobre $\overline{G}$. En la cuarta igualdad se ha aplicado la propiedad (5) que es justa para todo valor de $\varepsilon > 0$.

El teorema siguiente ofrece un criterio suficiente de convergencia uniforme de la integral impropia (1).

TEOREMA 3 (CRITERIO DE WEIERSTRASS). *Si la función* $f(x, y)$ *es continua sobre* $\overline{G} \times \overline{\Omega}$ *a excepción de los puntos* (x, y^0) $(y^0 \in \overline{\Omega})$, *y satisface sobre* $\overline{G} \times \overline{\Omega}$ *la desigualdad*

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(y) \quad (x \in \overline{G}), \tag{8}$$

donde la integral

$$\int_{\bar{\Omega}} \varphi(y)\, dy < \infty \tag{8'}$$

converge, la integral (1) *converge uniformemente sobre* $\bar{G}$.

DEMOSTRACIÓN. Asignemos $\eta > 0$. En virtud de la convergencia de la integral (8') existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\left| \int_{\Omega \cap U(y^0,\, \varepsilon)} \varphi(y)\, dy \right| = \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \varphi(y)\, dy \right| < \eta, \quad \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0,$$

por eso, si $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_0$, entonces

$$\eta > \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon'}} \varphi(y)\, dy - \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \varphi(y)\, dy \right| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon'}} \varphi(y)\, dy \right|,$$

$$\forall\, \varepsilon,\ \varepsilon' < \varepsilon_0.$$

Pero entonces, en virtud de (8)

$$\eta > \left| \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon'}} \varphi(y)\, dy \right| > \left| \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon'}} f(x,\ y)\, dy \right| = |F_\varepsilon(x) - F_{\varepsilon'}(x)|$$

para todos los valores de ε, $\varepsilon' < \varepsilon_0$ y para todo valor de $x \in \bar{G}$.

Hemos obtenido la condición de Cauchy para la convergencia uniforme de $F_\varepsilon(x)$ cuando $\varepsilon \to 0$ sobre $\bar{G}$. Esto muestra que tiene lugar la convergencia uniforme

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\bar{\Omega}_\varepsilon} f(x,\ y)\, dy = \int_{\bar{\Omega}} f(x,\ y)\, dy.$$

EJEMPLO 1. La integral

$$\psi(a) = \int_0^1 x^{a-1}\, dx \quad (a > 0) \tag{9}$$

existe para todo valor de $a > 0$. Para $0 < a < 1$ el punto $x = 0$ es singular y para $a \geqslant 1$ sobre el segmento $[0,\ 1]$ la función subintegral es continua y la integral no tiene particularidades.

Para aclarar la cuestión acerca de la convergencia uniforme de la integral impropia, tenemos que apreciar la integral

$$\left| \int_0^\varepsilon x^{a-1}\, dx \right| = \frac{\varepsilon^a}{a}$$

que suele llamarse *resto de la integral* correspondiente al punto singular $x = 0$. Para un número arbitrario $\eta > 0$ es imposible escoger $\varepsilon_0 > 0$ de modo que el resto sea menor que η, $\forall a > 0$, $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$, porque para cualquier ε fijo

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon^a / a = \infty \quad (a > 0).$$

Por eso la integral (9) converge no uniformemente respecto a $a > 0$.

De suerte, la función $x^{a-1} = \varphi(x, a)$ es continua sobre $[0, 1] \times [0, 1]$, a excepción de los puntos con $x = 0$. La misma integral $\psi(a) = 1/a$ es una función discontinua sobre $[0, 1]$. Esto muestra que la exigencia de que la integral converja uniformemente es esencial para la continuidad de la misma.

Luego, es evidente que para $0 < a_0 \leqslant a \leqslant 1$ la integral (9) converge uniformemente. En efecto, si $a_0 \leqslant a$, entonces sobre el segmento $[0, \varepsilon]$, donde $0 < \varepsilon < 1$, $x^{a-1} \leqslant x^{a_0-1}$ y la integral

$$\int_0^{\varepsilon} x^{a_0-1}\, dx = \frac{\varepsilon^{a_0}}{a_0} < \infty;$$

por eso, según el criterio de Weierstrass, la integral (9) converge uniformemente para $a_0 \leqslant a \leqslant 1$.

Así, pues, la integral (9) es una función continua sobre $[a_0, 1]$. Si $a > 0$, la integral (9) se puede derivar bajo el signo de la integral, o sea,

$$\psi'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} x^{a-1}\, dx = \int_0^1 x^{a-1} \ln x\, dx. \tag{10}$$

En efecto, puesto que $\lim_{x \to 0} x^{\lambda} \ln x = 0$ $(\lambda > 0)$, la función

$$\mu(x) = \begin{cases} x^{\lambda} \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es continua sobre $[0, 1]$ y, por consiguiente, está acotada sobre $[0, 1]$. Por eso para $0 < a_0 \leqslant a \leqslant 1$

$$|x^{a-1} \ln x| \leqslant |x^{a-\lambda-1}| \cdot |x^{\lambda} \ln x| \leqslant c\,|x^{a-\lambda-1}|$$

y la integral

$$\int_0^{\varepsilon} x^{a-\lambda-1}\, dx = \frac{\varepsilon^{a-\lambda}}{a-\lambda} < \infty. \quad (0 < \lambda \leqslant a - a_0).$$

De aquí, según el criterio de Weierstrass, la integral del segundo miembro de (10) converge uniformemente. Luego, la función $\frac{\partial}{\partial a} x^{a-1} = x^{a-1} \ln x$ es continua sobre $[0, 1] \times [0, 1]$, a excepción de los puntos en que $x = 0$. Por eso, conforme al teorema 2, la fórmula (10) es justa.

La integral (1) se puede examinar para una región no acotada Ω, suponiendo que la función $f(x, y)$ es continua sobre el conjunto $\overline{G} \times \Omega$ de los puntos (x, y). Por cuanto la región Ω no está acotada, la integral (1) como la de Riemann, no existe, pero puede existir en el sentido impropio como el límite

$$\lim_{R \to \infty} F_R(x) = \lim_{R \to \infty} \int_{\Omega_R} f(x, y)\, dy = \int_{\Omega} f(x, y)\, dy = F(x), \qquad (11)$$

donde $\Omega_R = \Omega \cap U(O, R)$, $U(O, R)$ es la esfera de radio R que tiene por centro el punto nulo.

Supongamos que

$$F_R(x) = \int_{\Omega_R} f(x, y)\, dy$$

y que existe el límite

$$\lim_{R \to \infty} F_R(x) = F(x) = \int_{\Omega} f(x, y)\, dy$$

para todos los valores de $x \in \overline{G}$, o sea, que la integral (11) como impropia existe para todos los valores de $x \in \overline{G}$.

En este caso se dice que el *punto alejado infinitamente es el punto singular de la integral* (11).

Por definición, la integral (11) se llama *uniformemente convergente*, si $F_R(x) \to F(x)$, $R \to \infty$, uniformemente respecto a $x \in \overline{G}$.

Al igual que en el caso de un punto singular finito, se demuestra que para una función $f(x, y)$ continua sobre $\overline{G} \times \Omega$ la integral (11), si converge uniformemente sobre $\overline{G}$, es una función continua de $x \in \overline{G}$. Luego, si G es una región acotada con frontera suave a trozos, tiene lugar la igualdad

$$\int_G dx \int_{\Omega} f(x, y)\, dy = \int_{\Omega} dy \int_G f(x, y)\, dx.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ es continua sobre Ω y la integral de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

respecto a Ω converge uniformemente respecto a $x \in \bar{G}$, entonces (11) puede derivarse bajo el signo de la integral

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} f(x, y)\, dy = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)\, dy.$$

EJEMPLO 2. Investigar la integral

$$I(x) = \int_0^{\infty} xe^{-xy}\, dy \quad (x \geqslant 0).$$

Es evidente que $I(0) = 0$ y para $x \neq 0$

$$I(x) = \lim_{R \to \infty} \int_0^R xe^{-xy}\, dy = \lim_{R \to \infty} -e^{-xy}\Big|_0^R = 1.$$

Ahora bien, la función $I(x)$ es discontinua sobre $[0, \infty)$. Esto se debe a que nuestra integral converge no uniformemente; el resto de la integral

$$\int_R^{\infty} xe^{-xy}\, dy = e^{-Rx}$$

no tiende a cero para cualquier R fijo y cuando $x \to 0$ (este resto tiende hacia 1).

EJEMPLO 3. FUNCIÓN GAMMA. La integral

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\, dx \tag{12}$$

se llama *función gamma* o *integral de Euler de segundo género*.

Cuando $a \geqslant 1$, ella tiene el punto singular $x = \infty$ y cuando $0 < a < 1$, tiene dos puntos singulares $x = 0$, $x = \infty$.

Para investigar esta integral es cómodo desarrollarla en dos integrales

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\, dx + \int_1^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\, dx.$$

Puesto que para $0 < x \leqslant 1$ tenemos $x^{a-1}e^{-x} \leqslant x^{a-1}$, entonces (como esto se ve del ejemplo 1) la primera integral converge uniformemente para todos los valores de $a \geqslant a_0 > 0$, cualquiera que sea el número $a_0 > 0$. La segunda integral converge, evidentemente, para todo número real a.

Si a_0 es un número cualquiera, entonces para $a \leqslant a_0$

$$x^{a-1}e^{-x} \leqslant x^{a_0-1}e^{-x} \quad (1 \leqslant x < \infty),$$

y como

$$\int_1^\infty x^{a_0-1}e^{-x}\,dx < \infty,$$

entonces, según el criterio de Weierstrass, la segunda integral converge uniformemente $\forall a \leqslant a_0$. No obstante, la convergencia de esta integral para un valor cualquiera de a no es uniforme.

Por ejemplo, cuando $a > 1$ y $R > 1$

$$\int_R^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx \geqslant R^{a-1}\int_R^\infty e^{-x}\,dx = R^{a-1}e^{-R} \to \infty$$

para $a \to +\infty$ y cualquiera R fijo.

Cuando $a > 1$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left\{-x^{a-1}e^{-x}\Big|_0^R + (a-1)\int_0^R x^{a-2}e^{-x}\,dx\right\} =$$

$$= (a-1)\,\Gamma(a-1).$$

Por eso para $a = n$ natural

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \ldots = n!\Gamma(1) =$$

$$= n!\int_0^\infty e^{-x}\,dx = n!,$$

de donde se ve que es natural considerar la función gamma como generalización del factorial.

Capítulo 3

Análisis vectorial

§ 3.1. Curva orientada suave a trozos

La curva

$$r(t) = \varphi(t)\, i + \psi(t)\, j + \chi(t)\, k \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1}$$

se llama *suave a trozos continua*, si las funciones (φ, ψ, χ) son continuas sobre $[a, b]$ y el segmento $[a, b]$ se puede partir en un número finito de segmentos parciales por los puntos

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$$

de modo que sobre cada uno de ellos las funciones φ, ψ, χ tengan las derivadas continuas que no sean simultáneamente iguales a cero[1]).

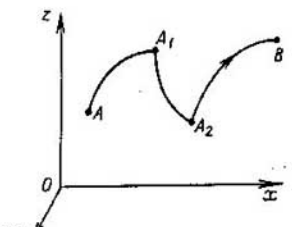

Fig. 63.

La fig. 63 muestra una curva suave a trozos continua. En los puntos A_1 y A_2 ella es continua, pero las derivadas $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ todas o algunas, sufren discontinuidad (de primer género).

Designaremos la curva (1) con una letra, por ejemplo, con la letra Γ. Generalmente Γ significa no sólo el lugar geométrico de los puntos (x, y, z) definidos por las ecuaciones (1) sino también el orden de seguimiento de estos puntos cuando t crece continuamente de a a b ($a < b$). En este sentido se dice que Γ es una *curva orientada*. El orden de seguimiento se designa en la figura con una flecha (fig. 63): cuando t *crece* continuamente de a a b el punto (x, y, z) se desplaza por Γ en el sentido de la flecha.

Si $t = \lambda(\tau)$ es la función con una derivada positiva continua sobre cierto segmento $[c, d]$ y, además $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$, entonces la ecuación

$$r(\lambda(\tau)) = \varphi[\lambda(\tau)]\, i + \psi[\lambda(\tau)]\, j + \chi[\lambda(\tau)]\, k \quad (c \leqslant \tau \leqslant d) \tag{1'}$$

define la misma curva orientada que Γ. Se designa por la misma letra Γ, solamente en el caso de la ecuación (1) se dice que Γ se define por el parámetro t y en el caso de (1'), por el parámetro τ. En ambos

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», §§ 4.21, 7.3.

casos, al crecer t de a a b o al crecer τ de c a d, los puntos respectivos de Γ se desplazan en el mismo sentido.

Otra cosa es si se lleva a cabo la sustitución de $t = \lambda(\tau)$, donde $\lambda(\tau)$ tiene una derivada negativa continua sobre el segmento $[c, d]$ $(ic < dl)$. En este caso $\lambda(c) = b$, $\lambda(d) = a$ y al crecer continuamente τ de c a d el parámetro t decrecerá y sobre nuestro objeto geométrico es necesario orientar la flecha en el otro sentido.

Por eso cuando $\lambda'(\tau) < 0$ designaremos la curva (1') por otro símbolo Γ_- y diremos que Γ_- es *la misma curva que* Γ, *pero orientada en el sentido opuesto*. En algunos casos designaremos la curva orientada inicial con el símbolo Γ_+.

La curva orientada (1) se denomina *cerrada* o *contorno cerrado*, si $r(a) = r(b)$ o, lo que es lo mismo, si

$$\varphi(a) = \varphi(b), \quad \psi(a) = \psi(b), \quad \chi(a) = \chi(b).$$

En otras palabras, cuando el valor del parámetro t crece continuamente de a a b el punto correspondiente (x, y, z) hace en el espacio

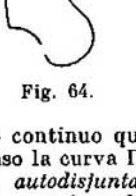

Fig. 64.

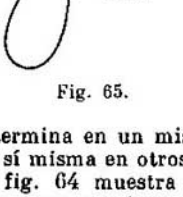

Fig. 65.

un recorrido continuo que empieza y termina en un mismo punto. Si en este caso la curva Γ no se corta a sí misma en otros puntos, se llama *curva autodisjunta cerrada*. La fig. 64 muestra una curva autodisjunta cerrada y la fig. 65, una curva *autointersectadora* cerrada.

Observación. La ecuación vectorial (1) de la curva Γ es equivalente a tres ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

En este caso diremos que la curva Γ es dada en forma paramétrica.

EJEMPLO 1. Supongamos que la curva Γ se da por la ecuación

$$r(t) = iR\cos t + jR \operatorname{sen} t \quad (x = R\cos t,\ y = R \operatorname{sen} t),$$

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Por cuanto $x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = R^2$, la curva dada es una circunferencia de radio R que tiene por centro el origen de coordenadas. Al crecer t de 0 a 2π el punto $A = (x, y)$ se mueve por la circunferencia en el sentido contrario al de las agujas del reloj. En este caso a diferentes t corresponden diferentes puntos A.

Cuando $t = 0$ y $t = 2\pi$ tenemos $r(0) = r(2\pi) = iR$. Por lo tanto, la circunferencia es una curva autodisjunta cerrada (fig. 66).

EJEMPLO 2. La curva $r(t) = a(i \cos t + j \operatorname{sen} t) + btk$, donde $0 \leqslant t < \infty$, a, b son números positivos, se llama *hélice*. Esta puede ser obtenida del modo siguiente. Un segmento de longitud a, perpendicular al eje z, con un extremo se desliza por el eje z y a la vez gira alrededor del eje z, entonces el otro extremo del segmento describe una hélice. Supongamos que la altura de elevación del segmento en el eje z es proporcional al ángulo de giro t ($z = bt$). Al crecer t el punto (x, y, z) se mueve según se indica en la fig. 67. Es evidente que la hélice está situada sobre la superficie lateral de un cilindro circular de radio a con una generatriz paralela al eje z.

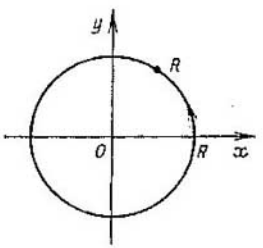

Fig. 66.

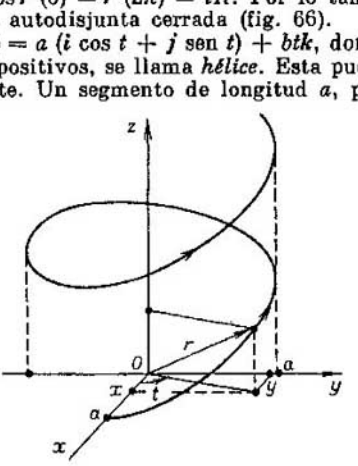

Fig. 67.

§ 3.2. Integral curvilínea de primer género

Supongamos que está dada la curva suave a trozos continua Γ

$$r(t) = \varphi(t)\, i + \psi(t)\, j + \chi(t)\, k, \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1}$$

y supongamos que sobre Γ o en el entorno de Γ se define la función continua $F(x, y, z)$.

El número igual a

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z)\, ds =$$

$$= \int_0^T F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\, dt \tag{2}$$

se llama *integral curvilínea de primer género de la función* $F(x, y, z)$ *respecto a la curva* Γ.

El primer miembro de (2) es la designación de la integral de primer género y su segundo miembro es la definición de la misma: es una integral definida corriente respecto a t sobre $[0, T]$.

Por ejemplo, si la curva Γ posee una masa con una densidad de distribución $F(x, y, z)$ en los puntos $(x, y, z) \in \Gamma$, entonces la masa total M de la curva se calcula por medio de la integral (2). Así, el elemento de la curva material correspondiente al segmento $[t, t + dt]$ de variación de t tiene una masa, con una exactitud hasta un infinitésimo de orden superior, igual a

$$F\,ds = F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,dt,$$

donde ds es la diferencial del arco de Γ; esto muestra que M es igual al segundo miembro de (2).

La magnitud de la integral de primer género no varía al cambiar la orientación de la curva:

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z)\,ds = \int_{\Gamma_-} F(x, y, z)\,ds.$$

Por ejemplo, la curva (1) puede definirse por las ecuaciones

$$x = \varphi(T - \tau), \quad y = \psi(T - \tau), \quad z = \chi(T - \tau) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant T),$$

que la orientan en el sentido contrario y entonces

$$\int_0^T F[\varphi(T-\tau), \psi(T-\tau), \chi(T-\tau)] \times$$

$$\times \sqrt{\varphi'(T-\tau)^2 + \psi'(T-\tau)^2 + \chi'(T-\tau)^2}\,d\tau =$$

$$= -\int_T^0 F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^T F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,dt.$$

EJEMPLO 1. Supongamos que a lo largo de la hélice definida en el ejemplo 2 del § 3.1 están distribuidas las masas de densidad $F(x, y, z) = z^2$. Hallar la masa M de un tramo de la hélice cuando el parámetro t varía de 0 a 3 $(0 \leqslant t \leqslant 3)$.

Escribamos la ecuación de la hélice que se examina en la forma

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \quad z = bt \quad (0 \leqslant t \leqslant 3).$$

Entonces

$$M = \int_0^3 F[x(t),\ y(t),\ z(t)]\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^3 b^2 t^2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2}\,dt =$$

$$= b^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^3 t^2\,dt = 9b^2\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

EJEMPLO 2. Calcular la integral de primer género sobre la elipse

$$x = a\cos t,\quad y = b\operatorname{sen} t\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

de la función $F(x,\ y) = \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}$.

Tenemos

$$\int_\Gamma F(x,\ y)\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\ \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (b^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t)\,dt = \pi(a^2+b^2).$$

§ 3.3. Integral del vector a lo largo de una curva

Supongamos que en el espacio R_3 donde está definido un sistema rectangular de coordenadas x, y, z está dada una curva suave a trozos continua orientada Γ con el punto inicial A_0 y el punto final A_1. Si Γ está cerrada, A_0 coincide con A_1. Supongamos que

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad z = \chi(t)\quad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

son las ecuaciones de Γ y al valor $t = 0$ le corresponde el punto A_0 y al valor $t = T$ le corresponde el punto A_1.

En cada punto interior (no anguloso) A de un trozo suave cualquiera de Γ está definido biunívocamente el vector unidad τ de la tangente a Γ, dirigido en el sentido de crecimiento de t.

Supongamos que sobre Γ o sobre el conjunto Ω que contiene Γ está dado un campo del vector continuo (el vector se asigna)

$$a = P(x, y, z)\, i + Q(x, y, z)\, j + R(x, y, z)\, k,$$

donde P, Q, R son las funciones continuas sobre Γ (o sobre Ω).

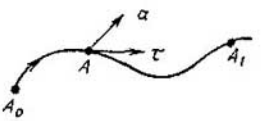

Fig. 68.

Es mejor representar este cuadro así (fig. 68): de un punto cualquiera $(x, y, z) \in \Gamma$ (o Ω) sale el vector a cuyo sentido y longitud dependen de este punto ($a = a(x, y, z)$).

La magnitud

$$\int_\Gamma (a\, ds) = \int_\Gamma (a\tau)\, ds = \int_0^T \{P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\, \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\, \psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\, \chi'(t)\}\, dt \quad (1)$$

se llama *integral curvilínea del vector a a lo largo de la curva orientada* Γ.

Los términos primero y segundo de la cadena (1) son las designaciones de un concepto nuevo, o sea, de la integral de a a lo largo de (o sobre) Γ. El tercer término es su definición: es una integral corriente respecto a t sobre $[0, T]$.

Por símbolo ds en el primer término de la cadena (1) se entiende un vector de dirección τ y una longitud igual a la del arco ds de la curva Γ. El símbolo $(a\, ds)$ es el producto escalar de a y ds.

La tripleta $(\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))$ es un vector tangente a Γ. Normalizándolo, obtenemos el vector unidad tangente

$$\tau = \left(\frac{\varphi'}{s_t'}, \frac{\psi'}{s_t'}, \frac{\chi'}{s_t'}\right), \quad s_t' = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}.$$

Por eso

$$(a\, ds) = (a\tau)\, ds = [P(\varphi, \psi, \chi)\, \varphi' + Q(\varphi, \psi, \chi)\, \psi' + R(\varphi, \psi, \chi)\, \chi']\, dt.$$

Integrando este elemento respecto a t, obtenemos el segundo miembro de (1). Se aplica, además, la siguiente designación para la integral del vector a sobre Γ:

$$\int_\Gamma (a\, ds) = \int_\Gamma [P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz]. \quad (2)$$

Ella muestra que si se requiere calcular la integral de $\boldsymbol{a}$ a lo largo Γ, es necesario poner en el segundo miembro de (2) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$, $dy = \psi'(t)\,dt$, $dz = \chi'(t)\,dt$ e integrar el resultado respecto a t entre 0 y T.

La expresión

$$\int_{\Gamma} a\,(ds) \tag{3}$$

(ds es un vector) se llama *integral de segundo género*.

Recalquemos: para calcular la integral de segundo género, introducimos el vector unidad τ de la tangente a Γ dirigido de acuerdo con la orientación de Γ y escribimos el elemento subintegral en (3) en la forma

$$(a\,ds) = (a\tau)\,ds.$$

Aquí ds ($ds > 0$), escalar, es la diferencial del arco de Γ y la magnitud $(a\tau)$ es la función definida sobre Γ.

El cálculo de la integral (3) de segundo género se reduce al cálculo de la integral de primer género:

$$\int_{\Gamma} (a\,ds) = \int_{\Gamma} (a\tau)\,ds. \tag{4}$$

El primer miembro de (4) es la integral de segundo género y el segundo miembro es la integral de primer género igual a aquélla.

Ahora bien, las denominaciones integral de primero o segundo género no se relacionan con la esencia de la cuestión sino con las designaciones.

La expresión

$$\int_{\Gamma} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

se llama asimismo *integral de segundo género*.

Sabemos que la integral de primer género sobre Γ no depende de la orientación de Γ. Sin embargo, la integral de segundo género sobre Γ depende de la orientación de Γ. A saber, ella cambia de signo al cambiar la orientación

$$\int_{\Gamma_-} (a\,ds) = -\int_{\Gamma} (a\,ds).$$

En efecto,

$$\int_{\Gamma_-} (a\,ds) = \int_{\Gamma_-} (a\tau_-)\,ds = \int_{\Gamma} (a\tau_-)\,ds = -\int_{\Gamma} (a\tau)\,ds = -\int_{\Gamma} (a\,ds).$$

Aquí τ es el vector unidad de la tangente a la curva orientada Γ y τ_- es el vector unidad de la tangente a Γ_-.

El segundo término de esta cadena es la integral de primer género de la función $(a\tau_-)$ (definida sobre Γ). No depende de la orientación de Γ que es lo que explica la segunda igualdad de la cadena. La tercera igualdad se deduce del hecho de que

$$(a\tau_-) = -(a\tau).$$

La última igualdad se deduce de la definición de la integral de segundo género del vector a sobre la curva orientada Γ.

Si la curva orientada Γ es la suma de dos diferentes curvas orientadas Γ_1 y Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$), entonces

$$\int_{\Gamma} (a\,ds) = \int_{\Gamma_1} (a\,ds) + \int_{\Gamma_2} (a\,ds).$$

La fig. 69 muestra la curva orientada Γ partida en dos curvas respectivamente orientadas Γ_1 y Γ_2.

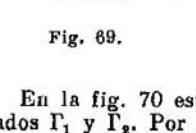

Fig. 69.

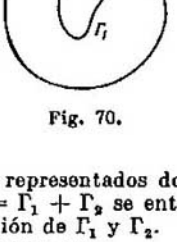

Fig. 70.

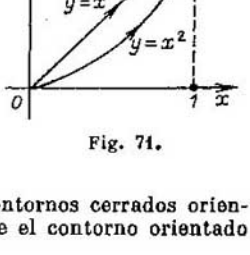

Fig. 71.

En la fig. 70 están representados dos contornos cerrados orientados Γ_1 y Γ_2. Por $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ se entiende el contorno orientado compuesto, o sea, la unión de Γ_1 y Γ_2.

Por definición se supone que

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}.$$

EJEMPLO 1. Calcular la integral de segundo género (fig. 71)

$$I_1 = \int_{AB} (x^2\,dx + xy\,dy)$$

a lo largo del segmento rectilíneo que va del punto (0, 0) al punto (1, 1) y respecto al arco de la parábola $y = x^2$ que une estos mismos puntos.

En el primer caso tenemos ($y = x$)

$$I_1 = \int_{AB} (x^2\,dx + xy\,dy) = \int_0^1 (x^2 + x^2)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

En el segundo caso ($y = x^2$)

$$I_1 = \int_0^1 (x^2\,dx + x^3\,2x\,dx) = \int_0^1 (x^2 + 2x^4)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

EJEMPLO 2. Calcular la integral de segundo género

$$I_2 = \int_{AB} \left(x^2y\,dx + \frac{x^3}{3}\,dy\right)$$

tomada a lo largo de las mismas curvas que en el ejemplo 1.

Tenemos ($y = x$)

$$I_2 = \int_0^1 \left(x^3\,dx + \frac{x^3}{3}\,dx\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Luego, para $y = x^2$ obtenemos

$$I_2 = \int_0^1 \left(x^4\,dx + \frac{x^3}{3}\,2x\,dx\right) = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{2}{3}x^4\right)dx = \frac{5}{3}\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{3}.$$

Estos ejemplos muestran que, en general, la integral de segundo género depende de la curva sobre la cual se calcula o, dicho de otro modo, depende de la ruta de integración.

En el segundo ejemplo hemos recibido un mismo valor siguiendo diferentes rutas de integración. Resulta que esto no es casual. A continuación vamos a aclarar la causa de la última propiedad.

§ 3.4. Campo de un potencial

Un caso importante del campo del vector

$$a = P(x, y, z)\,i + Q(x, y, z)\,j + R(x, y, z)\,k$$

es el que consiste en que sobre la región Ω, donde está dado el campo existe la función $U(x, y, z)$ con derivadas parciales continuas para las cuales se cumplen las igualdades (sobre Ω)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Tal función se llama *función potencial* o simplemente *potencial* del vector $\boldsymbol{a}$ sobre Ω. Dicho también de otro modo, el vector $\boldsymbol{a}$ es el *gradiente de la función* U y se escribe[1])

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\, i + \frac{\partial U}{\partial y}\, j + \frac{\partial U}{\partial z}\, k = a.$$

EJEMPLO 1. La función

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

está definida sobre todo el espacio, a excepción del punto nulo (0, 0, 0). Su gradiente es igual a

$$\operatorname{grad} U = \frac{x}{r^3}\, i + \frac{y}{r^3}\, j + \frac{z}{r^3}\, k = a.$$

En la igualdad

$$a = \frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}\, i + \frac{y}{r}\, j + \frac{z}{r}\, k\right)$$

entre paréntesis se encuentra el vector unidad dirigido en el sentido del radio vector del punto (x, y, z). Pero entonces

$$|\, a \,| = \frac{1}{r^2}.$$

Estos hechos se pueden interpretar del modo siguiente. En el punto nulo está la carga unidad eléctrica; en el punto (x, y, z) también está la carga unidad del mismo signo. La fuerza de interacción (de repulsión) entre estas cargas es el vector, aplicado al punto (x, y, z), que está orientado como radio vector del punto (x, y, z); su magnitud es igual a $1/r^2$.

Como vemos, el vector $\boldsymbol{a}$ tiene el potencial $U = -1/r$.

Pasemos a las propiedades generales del campo de vector con un potencial.

TEOREMA 1. *Para que el campo del vector* $\boldsymbol{a}$, *dado en la región* Ω *del espacio, tenga un potencial es necesario y suficiente que cumpla una de las dos condiciones siguientes:*

1) *La integral del vector* $\boldsymbol{a}$ *tomada sobre cualquier contorno cerrado (suave a trozos)* Γ, *perteneciente a* Ω, *es igual a cero.*

2) *La integral tomada por cualquier ruta (suave a trozos)* $\Gamma \subset \Omega$ *que une dos puntos cualquiera de* Ω *no depende de la ruta de integración.*

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 8.8.

Si $U(x, y, z)$ es la función potencial del vector a, entonces la integral de a tomada a lo largo de cualquier ruta $\Gamma_{AB} \subset \Omega$ que une los puntos $A = (x_0, y_0, z_0)$ y $B = (x, y, z)$ es igual a

$$\int_{\Gamma_{AB}} (a\, ds) = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0). \qquad (1)$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos, ante todo, la equivalencia de las propiedades 1) y 2).

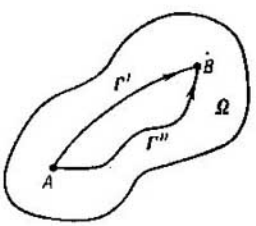

Fig. 72.

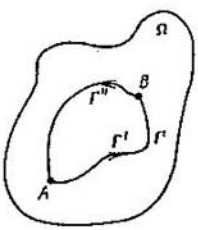

Fig. 73.

Supongamos que es justa la propiedad 1). Asignemos en Ω dos puntos A y B (fig. 72). Unámoslos por medio de dos curvas diferentes Γ' y Γ'' orientadas de A a B.

En virtud de 1)

$$\int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''^{-}} = 0,$$

por eso

$$\int_{\Gamma'} = -\int_{\Gamma''^{-}} = \int_{\Gamma''}$$

y queda demostrada la propiedad 2).

Inversamente, supongamos que es justa la propiedad 2). Asignemos un contorno cerrado orientado Γ (fig. 73).

Cortemos este contorno en los puntos A y B de modo que se obtengan respectivamente dos curvas orientadas

$$\Gamma = \Gamma' + \Gamma''.$$

En virtud de la propiedad 2)

$$\int_{\Gamma'} = \int_{\Gamma''^{-}},$$

de donde

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''} = \int_{\Gamma'} - \int_{\Gamma_-''} = 0$$

y queda demostrada 1).

Supongamos ahora que se sabe que el campo del vector a tiene en la región Ω la función potencial $U(x, y, z)$.

Asignemos sobre Ω el punto $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y el punto variable $A = (x, y, z)$. Unamos A_0 con A por medio de la curva suave a trozos continua $\Gamma = \Gamma_{A_0A}$, orientada de A_0 a A y definida por las ecuaciones

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau),$$
$$z = \chi(\tau) \quad (t_0 \leqslant \tau \leqslant t).$$

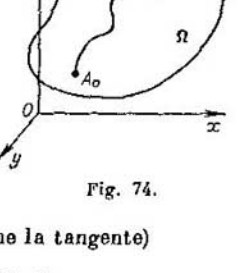

Fig. 74.

Ahora bien, a los valores t_0, t del parámetro τ les corresponden los puntos A_0, A.

Si se sustituyen en U x, y, z por las funciones φ, ψ, χ, respectivamente, entonces U será la función suave a trozos continua de τ. En virtud del teorema acerca de la función compuesta derivada en los puntos de suavidad de Γ (donde Γ tiene la tangente)

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{d\psi}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{d\chi}{d\tau}.$$

De aquí resulta que

$$\int_{\Gamma} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial x}\varphi'(\tau) + \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial y}\psi'(\tau) + \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial z}\chi'(\tau) \right) d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial U}{\partial \tau}\,d\tau = U[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] - U[\varphi(t_0), \psi(t_0), \chi(t_0)] =$$

$$= U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U(A) - U(A_0) \equiv V(A), \quad (2)$$

o sea, la integral curvilínea de segundo género para el punto A_0 fijo depende solamente de la posición del punto $A \in \Omega$ y no depende de la ruta por la cual este punto se alcanza a partir del punto A_0. De este modo hemos demostrado la propiedad 2) y la igualdad (1) si se sabe que el vector a tiene en la región Ω una función potencial.

Nos queda por demostrar que de la propiedad 2) se deduce que existe la función potencial $U(x, y, z)$, definida sobre Ω, cuyo gradiente sobre Ω es igual a $\boldsymbol{a}$. En efecto, asignemos el punto fijo $A_0 \in \Omega$ (fig. 74). Supongamos que se cumple la propiedad 2), o sea, el campo del vector $\boldsymbol{a}$ es tal que la integral curvilínea tomada sobre cualquier curva suave a trozos continua que une A_0 con un punto arbitrario $A \in \Omega$ no depende de esta curva y depende solamente del punto A. Ahora bien, existe la función $V(A)$ definida sobre Ω, tal que

$$\int\limits_{\Gamma_{A_0A}} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = V(A) = V(x, y, z).$$

Para demostrar que $\frac{\partial V}{\partial x} = P$ en el punto A, razonaremos del modo siguiente. Unamos el punto A_0 con A por la curva especial $\Gamma_{A_0A} \subset \Omega$ (véase la fig. 74) que termina con cierto segmento A_1A, paralelo al eje x. Prolonguemos este segmento hasta cierto punto A_2. Ahora bien, el punto variable A del segmento A_1A_2 tiene las coordenadas constantes y y z y una sola coordenada variable x. Representemos la curva Γ_{A_0A} en forma de la suma de las curvas

$$\Gamma_{A_0A} = \Gamma_{A_0A_1} + \Gamma_{A_1A}$$

y entonces

$$V(x, y, z) = \int\limits_{\Gamma_{A_0A}} (\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{s}) = \int\limits_{\Gamma_{A_0A_1}} (\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{s}) + \int\limits_{\Gamma_{A_1A}} (\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{s}) =$$

$$= K + \int\limits_{x_1}^{x} P(t, y, z)\,dt, \qquad (3)$$

donde $K = \int\limits_{\Gamma_{A_0A_1}} (\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{s})$ es la constante que no varía al moverse el punto A por el segmento A_1A_2 y $A_1 = (x_1, y, z)$. Hay que tener en cuenta que las ecuaciones del segmento A_1A_2 se pueden escribir en forma paramétrica (por el parámetro t) $x = t$, $y = y$, $z = z$ de donde se deduce que

$$\int\limits_{\Gamma_{A_1A}} Q\,dy = \int\limits_{x_1}^{x} Q(t, y, z) \cdot 0\,dt = 0,$$

$$\int\limits_{\Gamma_{A_1A}} R\,dz = \int\limits_{x_1}^{x} R(t, y, z) \cdot 0\,dt = 0.$$

De esta manera hemos obtenido la igualdad (3) que es justa cualquiera que sea el punto (x, y, z) del segmento A_1A_2. Aquí y, z son fijas y x puede variar. Puesto que bajo la integral respecto a t en el segundo miembro de (3) se encuentra la función continua de t, entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^{x} P(t, y, z)\, dt = P(x, y, z).$$

Análogamente, se puede demostrar que

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \Omega),$$

introduciendo las curvas especiales $\Gamma_{A_0A} \subset \Omega$ que terminan con un segmento que es paralelo al eje y en un caso y es paralelo al eje z en el otro.

EJEMPLO 2. Si la fuerza $\boldsymbol{a}$ es constante (en cuanto a su magnitud y su sentido) y el camino AB es rectilíneo, entonces, como es noto de la física, el trabajo de la fuerza es igual al producto de la magnitud de esta fuerza por la longitud del camino y por el coseno del ángulo entre la fuerza y la traslación, o sea, el trabajo es igual al producto escalar $(\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AB})$.

Sin embargo, si la fuerza $\boldsymbol{a} = \{P, Q, R\}$ es variable y el camino es curvilíneo, entonces, evidentemente, un elemento de trabajo de esta fuerza tomado sobre un tramo elemental del camino, correspondiente a la variación del parámetro de t a $t + \Delta t$, será aproximadamente igual al producto escalar de la fuerza $\boldsymbol{a}$ en cierto punto de este tramo y del vector de traslación que no es más que la cuerda que une los extremos del tramo:

$$P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta z.$$

Sumando estos elementos del trabajo y pasando al límite (para $\Delta t \to 0$), obtenemos el trabajo realizado a lo largo de toda la curva Γ

$$\int_0^T [P\varphi'(t) + Q\psi'(t) + R\chi'(t)]\, dt = \int_\Gamma (\boldsymbol{a}\boldsymbol{\tau})\, ds = \int_\Gamma (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{s}).$$

Así, pues, *la integral curvilínea de segundo género no es más que el trabajo de una fuerza variable (del vector $\boldsymbol{a}$) realizado a lo largo de un camino orientado.*

Calculemos el trabajo que realiza la fuerza $\boldsymbol{a}$, definida en el ejemplo 1, a lo largo del camino que une los puntos (1, 2, 2) y (3, 0, 4)

La fuerza $\boldsymbol{a}$ tiene la función potencial

$$U(x, y, z) = -1/r = -1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sobre la región Ω que no es más que el espacio sin el punto nulo. Por eso la integral curvilínea no depende del camino.

En virtud de la fórmula (1) la integral del vector a tomada a lo largo de cualquier camino (suave a trozos) $\Gamma \subset \Omega$ que une los puntos (1, 2, 2) y (3, 0, 4) es igual a

$$\int_{\Gamma} (a\, ds) = U(3, 0, 4) - U(1, 2, 2) = -$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2^2+2^2}} = \frac{2}{15}.$$

Por tanto el trabajo buscado realizado por el vector $a = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$ es igual a 2/15.

Surge la pregunta ¿cómo determinar si tiene o no el vector a una función potencial sobre la región dada Ω? Para esto introduzcamos algunos conceptos nuevos.

Introduzcamos el vector simbólico $\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$. Se llama *operador de Hamilton*[1]).

Se denomina *rotor del vector* a el vector

$$\operatorname{rot} a = \nabla \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k.$$

Ahora bien, se puede decir que el rotor del vector a es igual al producto vectorial del vector simbólico (operador de Hamilton) por el vector a.

Los dos teoremas siguientes dan respuesta a la pregunta planteada anteriormente.

TEOREMA 2. *Si el vector a tiene sobre Ω la función potencial U que posee segundas derivadas parciales continuas, entonces*

$$\operatorname{rot} a = o.$$

En efecto, según la condición del teorema

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

[1]) W. R. Hamilton (1805—1865), mecánico y matemático inglés.

Por eso

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}=0$$

sobre Ω que es lo que se necesitaba demostrar.

La afirmación inversa asimismo es justa, pero, hablando en general, para regiones simplemente conexas.

La región Ω se llama *simplemente conexa* si cualquier curva γ suave a trozos cerrada que le pertenece puede ser contraída en un punto perteneciente a Ω. Además, en el proceso de contracción γ debe pertenecer siempre a Ω.

En esta definición es suficiente suponer que las curvas γ son autodisjuntas. Tales curvas son fronteras de las regiones simplemente conexas respectivas $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$.

Como ejemplo de las regiones simplemente conexas puede servir todo el espacio o la esfera sin su frontera (superficie esférica).

Por otro lado, todo el espacio (¡tridimensional!) del cual está sacada la recta es el ejemplo de una región no simplemente conexa.

TEOREMA 3. *Si la región Ω es simplemente conexa y sobre ella está dado el vector a, con componentes continuamente derivables, para el cual*

$$\operatorname{rot} a = o,$$

entonces el vector a tiene sobre Ω una función potencial (el potencial).

En el caso tridimensional el teorema 3 se deduce de la fórmula de Stokes[1] que será demostrada en el § 3.15; en el caso bidimensional (plano) éste se deduce de la fórmula de Green[2] que demostraremos en el § 3.7.

En el caso plano examinamos el campo del vector

$$a = P(x, y)\, i + Q(x, y)\, j \quad ((x, y) \in \Omega),$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son las funciones continuas sobre la región Ω del plano.

La función $U(x, y)$ se llama potencial para el vector a sobre Ω si

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Los hechos expuestos anteriormente son justos asimismo para un plano. Sólo es necesario omitir por doquier z y suponer $R \equiv 0$.

[1] G. Stokes (1819—1903), físico y matemático inglés.
[2] G. Green (1793—1841), matemático inglés.

En el caso plano la definición de la región simplemente conexa se conserva. Prestemos atención a que un plano (espacio bidimensional) del cual está sacado un punto no es una región simplemente conexa.

EJEMPLO 3. El vector a con las componentes

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

tiene las derivadas parciales continuas sobre la región G que no es más que un plano con el punto nulo sacado.

Si el vector a se escribe en la forma

$$a = Pi + Qj + 0 \cdot k,$$

entonces se deduce que

$$\operatorname{rot} a = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k.$$

Es fácil comprobar que en el caso dado

$$\operatorname{rot} a = o \quad \text{(sobre } G\text{)}.$$

La región G (¡de un plano!) no es simplemente conexa. No satisface la condición del teorema 3 y el mismo teorema, como veremos, para ella no es justa.

En efecto, la curva γ (circunferencia)

$$x = \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

evidentemente, está cerrada y pertenece a G. La integral curvilínea del vector a tomada a lo largo de γ es igual a

$$\int_\gamma (a\, ds) = \int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Vemos que existe la curva cerrada $\gamma \subset G$ a lo largo de la cual la integral de a no es igual a cero.

Esto muestra, en virtud del teorema 1, que sobre G no existe una función potencial para el vector a que aquí se examina.

Por otro lado, si del plano (x, y) se saca el semieje negativo de x (fig. 75), o dicho de otro modo, si se lleva a cabo el corte del plano

por el semieje negativo de x, entonces el conjunto que queda y que designemos por G_1, será simplemente conexo y puesto que sobre G_1 rot $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, entonces, en virtud del teorema 3, sobre G_1 ya existe

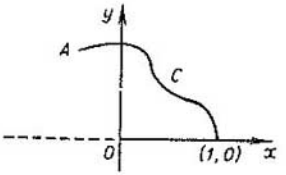

Fig. 75.

la función potencial del vector $\boldsymbol{a}$. Esta función puede ser escrita del modo siguiente:

$$U(A) = U(x, y) = \int_{\overset{\frown}{G}} \frac{-y\,\partial x + x\,dy}{x^2 + y^2},$$

donde $C \subset G_1$ es la curva orientada que une cierto punto inicial fijo A_0, por ejemplo (1, 0), y el punto variable $A = (x, y) \in G_1$ (véase la fig. 75).

Notemos que la curva C no debe cortar el semieje negativo de x.

§ 3.5. Ecuación diferencial en diferenciales totales

Examinemos la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{1}$$

donde M y N son las funciones continuas sobre cierta región plana simplemente conexa Ω.

Supongamos que el primer miembro de (1) sea una diferencial total, o sea, que exista sobre Ω una función $U(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) \tag{2}$$

En este caso la ecuación (1) se llama *ecuación en diferenciales totales.*

Esta puede ser escrita en la forma

$$dU(x, y) = 0. \tag{1'}$$

Para resolver la ecuación (1), es necesario hallar la función $U(x, y)$ e igualarla a la constante arbitraria

$$U(x, y) = C. \tag{3}$$

La ecuación (3) ofrece la integral general de la ecuación (1), tanto respecto a sus soluciones que tienen la forma $y = y(x)$ como respecto a las que tienen la forma $x = x(y)$ (véase el teorema 1 del § 1.2).

Notemos que en virtud de las igualdades (2) la función $U(x, y)$ es el potencial del vector

$$a = M(x, y)\,i + N(x, y)\,j, \quad (x, y) \in \Omega. \tag{4}$$

Del § 3.4 sabemos que para hallar la función U es necesario calcular la integral curvilínea

$$U(x, y) = \int_C (P\,dx + Q\,dy)$$

sobre la curva suave a trozos $C \subset \Omega$ que une el punto fijo $A_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ con el punto variable $A = (x, y) \in \Omega$.

Supongamos que Ω es un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes x e y (fig. 76).

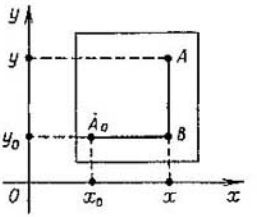

Fig. 76.

Se puede alcanzar el punto A a partir del punto A_0 por la vía A_0BA y entonces deben efectuarse los cálculos siguientes:

$$U(x, y) = \int_{C_{A_0B}} (P\,dx + Q\,dy) + \int_{C_{BA}} (P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(u, y_0)\,du + \int_{y_0}^{y} Q(x, v)\,dv, \tag{5}$$

porque

$$\int_{C_{A_0B}} Q\,dy = 0 \qquad \int_{C_{AB}} P\,dx = 0$$

Recordemos que de los teoremas 2 y 3 del § 3.4 resulta que para la región plana simplemente conexa Ω la ecuación (1) será ecuación en diferenciales totales si y sólo si (rot $a = o$)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{6}$$

(naturalmente, a condición de que M y N sean continuamente derivables sobre Ω).

EJEMPLO. Resolver la ecuación diferencial

$$(x^\alpha + y^{\beta+1})\,dx + (\beta + 1)\,xy^\beta dy = 0, \tag{7}$$

donde α, β son los números reales, en la región Ω de los puntos (x, y) con coordenadas positivas $(x > 0,\ y > 0)$. Aquí

$$M(x, y) = x^\alpha + y^{\beta+1}, \quad N(x, y) = (\beta + 1)\,xy^\beta,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (\beta + 1)\,y^\beta, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = (\beta + 1)\,y^\beta,$$

o sea,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ sobre } \Omega,$$

donde Ω es la región simplemente conexa. Por eso

$$\operatorname{rot} a = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) k = o$$

y, por consiguiente, según el teorema 3 del § 3.4 existe la función $U(x, y)$ cuya diferencial total es el primer miembro de (7). Se puede obtener esta función por la fórmula (5):

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} (u^\alpha + y_0^{\beta+1})\,du + \int_{y_0}^{y} (\beta + 1)\,xv^\beta + dv =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{x_0^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy_0^{\beta+1} - x_0y_0^{\beta+1} + xy^{\beta+1} - xy_0^{\beta+1} =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy^{\beta+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

Ahora bien, la solución general de la ecuación (7) en Ω es la función $y(x)$ que satisface la ecuación

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy^{\beta+1} = C,$$

donde C es la constante arbitraria. Cuando $\alpha = -1$, la solución general se halla de la ecuación

$$\ln|x| + xy^{\beta+1} = C.$$

§ 3.6. Orientación de una región plana

En el plano hay dos tipos de sistemas rectangulares de coordenadas representados en las figs. 77 y 78.

Su diferencia consiste en que es imposible, trasladando estos sistemas en el plano, hacerlos coincidir de modo que coincidan sus ejes positivos x e y.

La fig. 77 muestra la región simplemente conexa Ω con una frontera orientada suave a trozos Γ. Para el sistema de coordenadas

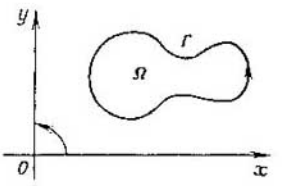

Fig. 77.

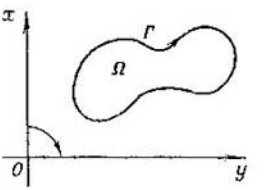

Fig. 78.

representado el recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj se considera *positivo*. Al moverse por Γ en el sentido antihorario la región Ω queda *a la izquierda*.

En la fig. 78 está representada la misma región Ω, pero en el otro sistema rectangular de coordenadas. Aquí el recorrido por Γ

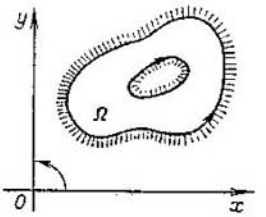

Fig. 79.

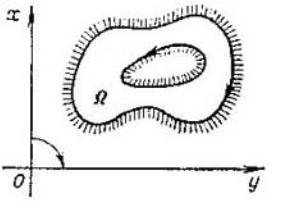

Fig. 80.

en el sentido de las agujas del reloj se considera positivo y entonces al moverse por Γ en el sentido horario la región Ω queda *a la derecha*.

Por definición, en el caso del sistema mostrado en la fig. 79, la frontera (contorno) Γ de una región plana múltiplemente (no simplemente) conexa Ω se considera *orientada positiva* o *negativamente* en dependencia del hecho de que quede Ω a la izquierda o a la derecha al moverse por Γ en el sentido indicado por la flecha.

En las figs. 79 y 80 están representadas las regiones doblemente conexas Ω en diferentes sistemas de coordenadas. Las flechas indicadas en sus fronteras corresponden al sentido positivo de Γ.

La fig. 81 muestra una región triplemente conexa cuya frontera está orientada negativamente.

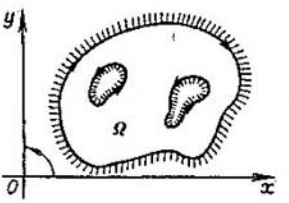

Fig. 81.

Se dice, además, que la *región Ω está orientada positiva* o *negativamente* si su frontera Γ está orientada, respectivamente, en el sentido positivo o negativo.

Si Ω está orientada positivamente, entonces Ω_- designa la misma región orientada negativamente.

Es útil el acuerdo siguiente. Sean Ω la región en el plano x, y, Ω_+ la región Ω orientada positivamente y Ω_- la región Ω orientada negativamente. Entonces, por definición,

$$\iint\limits_{\Omega_+} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{\Omega_-} f(x, y)\,dx\,dy = -\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy,$$

donde los segundos miembros son las integrales dobles corrientes sobre Ω de $f(x, y)$.

§ 3.7. Fórmula de Green

Para regiones planas suficientemente generales Ω provistas de una frontera Γ positivamente orientada es válida la fórmula

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int\limits_{\Gamma} (P\,dx + Q\,dy) \qquad (1)$$

llamada *fórmula de Green*. En ella se supone que Q, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, P, $\frac{\partial P}{\partial y}$ son continuas en la clausura $\bar{\Omega}$ de la región Ω.

Examinemos primeramente la región plana Ω representada en la fig. 82 que denominaremos *H_y-región elemental*. Inferior y superiormente Ω está limitada por las curvas suaves a trozos expresadas por las ecuaciones siguientes:

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$
$$\varphi(x) \leqslant \psi(x), \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

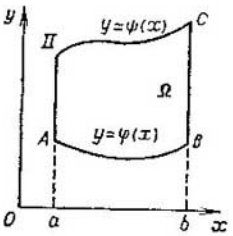

Fig. 82.

A la izquierda y a la derecha Ω está limitada por segmentos de rectas paralelas al eje de ordenadas. Notemos que estos segmentos pueden degenerar en puntos.

La frontera Γ de la región Ω se compone de cuatro partes:

$$\Gamma = \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA} + \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC}.$$

Para tal región Ω tiene lugar la igualdad

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int_a^b [P[x, \psi(x)] - P[x, \varphi(x)]]\, dx =$$

$$= -\int_b^a P[x, \psi(x)]\, dx - \int_a^b P[x, \varphi(x)]\, dx =$$

$$= -\int_{\Gamma_{CD}} P(x, y)\, dx - \int_{\Gamma_{DA}} P(x, y)\, dx - \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y)\, dx -$$

$$- \int_{\Gamma_{BC}} P(x, y)\, dx = -\int_{\Gamma} P(x, y)\, dx.$$

Aclaremos la última igualdad. La curva Γ_{CD} tiene las ecuaciones paramétricas (con el parámetro x)

$$x = x, \quad y = \psi(x).$$

En este caso al valor $x = b$ le corresponde el punto C y al valor $x = a$, el punto D. La curva Γ_{AB} se define por las ecuaciones

$$x = x, \quad y = \varphi(x).$$

Al valor $x = a$ le corresponde el punto A y al valor $x = b$, el punto B. Por último, el segmento BC tiene las ecuaciones $x = b$, $y = y$

(con el parámetro y). A lo largo de este segmento $dx = 0$, por eso de hecho

$$\int_{\Gamma_{BC}} P(x, y)\, dx = 0.$$

Análogamente, la integral sobre el segmento DA es igual a cero:

$$\int_{\Gamma_{DA}} = P(x, y)\, dx = 0.$$

Así, pues, hemos demostrado que

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\Gamma} P(x, y)\, dx. \tag{2}$$

Esta fórmula concierne a toda región Ω que pueda ser partida en un número finito de H_y-regiones elementales. Llamaremos a tal región simplemente *H_y-región.*

En efecto, sea $\Omega = \sum_{j=1}^{N} \Omega_j$, donde Ω_j son H_y-regiones elementales con frontera γ_j que vamos a considerar orientadas positivamente (fig. 83). Entonces

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \sum_{j=1}^{N} \iint_{\Omega_j} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \sum_{j=1}^{N} -\int_{\gamma_j} P\, dx = -\int_{\Gamma} P(x, y)\, dx. \tag{3}$$

La tercera igualdad necesita explicaciones.

Aquí es importante notar que si dos contornos γ_i y γ_j $(i \neq j)$ tienen un trozo común γ', entonces éste, como parte de γ_i y de γ_j, está orientado en dirección contraria y por eso las integrales curvilí-

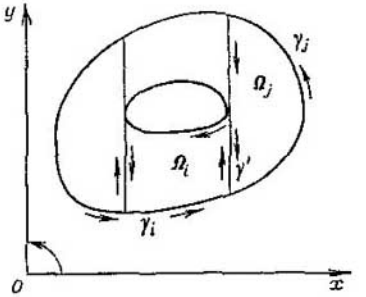

Fig. 83.

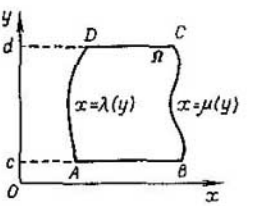

Fig. 84.

neas de P sobre γ' no se diferencian en ambos casos sino por el signo: su suma es igual a cero. Si lo último se tiene en cuenta la suma $\sum_{j=1}^{N}$ en la cadena (3) se reducirá a la suma de las integrales curvilíneas sobre los trozos γ_j, pertenecientes a Γ, a la suma que es igual a la integral sobre el contorno Γ.

Por analogía, se puede introducir el concepto de *H_x-región elemental*. En este caso Ω está limitada a la izquierda y a la derecha por las curvas suaves a trozos (fig. 84)

$$x=\lambda(y), \quad x=\mu(y),$$
$$\lambda(y)\leqslant\mu(y) \quad (c\leqslant y\leqslant d).$$

Superior e inferiormente Ω está limitada por los segmentos de las rectas paralelas al eje x.

Se puede decir también que la H_x-región elemental se define al igual que la H_y-región elemental, con la sola diferencia de que ahora es la coordenada x la que desempeña el papel de y.

Para la H_x-región elemental Ω obtenemos

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx=\int_c^d [Q(\mu(y),y)-Q(\lambda(y)y)]\,dy=$$
$$=\int_c^d Q(\mu(y),y)\,dy+\int_d^c Q(\lambda(y),y)\,dy=$$
$$=\int_{\Gamma_{BC}} Q(x,y)\,dy+\int_{\Gamma_{DA}} Q(x,y)\,dy=$$
$$=\int_{\Gamma_{BC}} Q\,dy+\int_{\Gamma_{CD}} Q\,dy+\int_{\Gamma_{DA}} Q\,dy+\int_{\Gamma_{AB}} Q\,dy=\int_{\Gamma} Q(x,y)\,dy, \quad (4)$$

ya que $dy=0$ sobre los segmentos CD y AB, entonces también

$$\int_{\Gamma_{CD}} Q\,dy=\int_{\Gamma_{AB}} Q\,dy=0.$$

La fórmula (4) asimismo concierne a toda región Ω que pueda partirse en un número finito de H_x-regiones elementales. Llamaremos a tal región simplemente *H_x-región*.

Así, pues, hemos demostrado la proposición siguiente:

TEOREMA 1. *Si la región Ω es simultáneamente una H_x-región y una H_y-región, para ella será válida la fórmula de Green.*

Para la demostración es suficiente restar de la igualdad (4) la igualdad (3) que son válidas para la región Ω que posee las propiedades indicadas.

Como ejemplos de las regiones que son a la vez H_x- y H_y-regiones pueden servir la región

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} x^2 < y < 1 \\ -1 < x < 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -\sqrt{y} < x < \sqrt{y} \\ 0 < y < 1 \end{matrix} \right\}$$

y la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

Además, estas regiones son H_x- y H_y-regiones elementales.

Observación 1. Se puede demostrar una afirmación más general. Si la región Ω está limitada por un contorno suave a trozos cerrado arbitrario Γ, que sea autodisjunto, entonces para ella será justa la fórmula de Green (1).

COROLARIO 1. *Si una región plana Ω es simplemente conexa y sobre ella queda asignado el vector continuamente derivable*

$$a = P(x, y)\, i + Q(x, y)\, j$$

para el cual

$$\operatorname{rot} a = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k = o,$$

entonces a tiene sobre Ω un potencial (o sea, tiene lugar en el caso plano el teorema 3 del § 3.4).

En efecto, asignemos un contorno suave a trozos continuo autodisjunto arbitrario $\gamma \subset \Omega$ que sea orientado positivamente (fig. 85).

Fig. 85.

Este contorno sirve de frontera de cierta región ω. Con arreglo al teorema (fórmula) de Green (véase la observación 1)

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \iint_\omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_\omega 0\,dx\,dy = 0$$

y por cuanto $\gamma \subset \Omega$ es un contorno autodisjunto cerrado arbitrario, entonces, en virtud del teorema 1 del § 3.4 el vector a tiene un potencial sobre Ω.

Observación 2. Puesto que la integral doble de la función unidad sobre la región Ω es igual al área (medida) de la región Ω, entonces, escogiendo P y Q de modo que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$, obtenemos diferentes expresiones del área de la región Ω por medio de una integral curvilínea:

$$m\Omega = \int_\Gamma (P\,dx + Q\,dy).$$

En particular, cuando $P = -y/2$ y $Q = x/2$, obtenemos

$$m\Omega = \frac{1}{2}\int_\Gamma (-y\,dx + x\,dy). \tag{5}$$

EJEMPLO. Calcular el área limitada por la elipse

$$x = a\cos t, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Según la fórmula (5) tenemos

$$S = \frac{1}{2}\int_\Gamma (-y\,dx + x\,dy) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\,\mathrm{sen}^2 t + ab\cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

§ 3.8. Integral sobre una superficie de primer género

Supongamos que la superficie suave S está definida por la ecuación

$$r(u, v) = \varphi i + \psi j + \chi k$$

$$((u, v) \in \Omega \rightleftarrows S, \quad |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| > 0), \tag{1}$$

donde Ω es una región acotada provista de frontera suave a trozos y φ, ψ, χ son las funciones continuamente derivables sobre $\overline{\Omega}$. El símbolo $\Omega \rightleftarrows S$ designa la correspondencia biunívoca entre los puntos $(u, v) \in \Omega$ y los de S.

Supongamos luego que sobre $\overline{S}$ o en el entorno de $\overline{S}$ está dada la función continua $F(x, y, z)$. Efectuemos la división de Ω en partes con fronteras suaves a trozos que no se intersequen dos a dos a no

ser por sus fronteras. A cada parte Ω_j le corresponde cierta parte S_j de la superficie S. Sea $A_j = (x_j, y_j, z_j)$ un punto arbitrario sobre S_j. Hagamos la suma

$$\Pi_N = \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \mid S_j \mid,$$

donde $\mid S_j \mid$ es el área S_j (véase el § 2.11). Su límite

$$\lim_{\text{máx } d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \mid S_j \mid = \int_S F(x, y, z)\, dS \tag{2}$$

se llama *integral sobre la superficie S (de primer género)* de la función F (o bien *integral de superficie de primer género*).

Por ejemplo, si sobre S está distribuida una masa con una densidad de distribución F, entonces la integral de F sobre S expresará la masa total S.

La integral (2) se calcula por la fórmula siguiente:

$$\int_S F(x, y, z)\, dS = \int_\Omega F[\varphi, \psi, \chi] \mid \dot{r}_u \times \dot{r}_v \mid du\, dv, \tag{3}$$

donde en el segundo miembro se encuentra una integral múltiple corriente respecto a $(u, v) \in \Omega$.

En particular, si la superficie suave S está definida por la ecuación $z = f(x, y)$ $((x, y) \in G)$, donde f es continua junto con sus derivadas parciales de primer género sobre $\overline{G}$, entonces se puede considerar que está dada paramétricamente por x, y:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = f(x, y).$$

Entonces

$$\dot{r}_x \times \dot{r}_y = -f'_x i - f'_y j + k,$$

$$\mid \dot{r}_x \times \dot{r}_y \mid = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \left(p = \frac{\partial f}{\partial x},\ q = \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

y, por consiguiente,

$$\int_S F(x, y, z)\, dS = \int_G F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy. \tag{4}$$

Demostremos la fórmula (3). Sea $A_j = (x_j, y_j, z_j)$ y

$$x_j = \varphi(u_j, v_j), \quad y_j = \psi(u_j, v_j), \quad z_j = \chi(u_j, v_j),$$
$$(u_j, v_j) \in \Omega_j \quad (j = 1, \ldots, N).$$

Entonces

$$\Pi_N = \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \int_{\Omega_j} | \dot{r}_u \times \dot{r}_v | \, du\, dv = \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \, | \dot{r}_u \times \dot{r}_v |_j^* \, | \Omega_j | =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \, | \dot{r}_u \times \dot{r}_v |_j \, | \Omega_j | + \varepsilon_N \to$$

$$\to \int_{\Omega} F[\varphi, \psi, \chi] \, | \dot{r}_u \times \dot{r}_v | \, du\, dv \quad (\max d(\Omega_j) \to 0),$$

donde el signo $|\ |_j$ significa que entre $|\ |$ está puesto el punto A_j y $|\ |_j^*$, que entre $|\ |$ está puesto un punto tal que se cumpla el teorema del valor medio para la integral

$$\int_{\Omega_j} | \dot{r}_u \times \dot{r}_v | \, du\, dv = | \dot{r}_u \times \dot{r}_v |_j^* \, | \Omega_j |$$

(véase el § 2.3, teorema 3).

Es evidente que $(K > | F(A) |)$ para todo valor pequeño de η

$$| \varepsilon_N | = \Big| \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \, [\, | \dot{r}_u \times \dot{r}_v |_j^* - | \dot{r}_u \times \dot{r}_v |_j] \, | \Omega_j | \Big| \leqslant$$

$$\leqslant K\eta \sum_{j=1}^{N} | \Omega_j | = K\eta \, | \Omega |$$

si sólo $d(\Omega_j) < \delta$, donde δ es un número dependiente de η, porque la función $| \dot{r}_u \times \dot{r}_v |$ es continua sobre $\overline{\Omega}$.

§ 3.9. Orientación de una superficie

Examinemos un trozo de la superficie suave S, definido por la ecuación vectorial

$$r = r(u, v) = \varphi(u, v)\, i + \psi(u, v)\, j + \chi(u, v)\, k \quad ((u, v) \in \overline{\Omega}), \tag{1}$$

donde las funciones φ, ψ, χ son continuamente derivables en la clausura $\overline{\Omega}$ de la región Ω provista de una frontera suave a trozos y

$$| \dot{r}_u \times \dot{r}_v | > 0, \quad (u, v) \in \overline{\Omega}. \tag{2}$$

Suponemos, como siempre, que tiene lugar la correspondencia biunívoca $\overline{\Omega} \rightleftarrows S$ entre los puntos $(u, v) \in \overline{\Omega}$ y los puntos de S.

La normal unidad en un punto arbitrario de S se determina por la fórmula

$$n = \pm \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|}, \quad (u, v) \in \bar{\Omega}. \tag{3}$$

Al signo «+» le corresponde un lado de la superficie S con la escobilla de vectores unitarios normales, continuamente dependientes de (u, v), salidos en dirección de ésta, y al signo «—», el otro lado de S.

Demos la definición. *Si de cada punto A de una superficie suave S se puede hacer salir la normal unidad $n(A)$ de modo que la función vectorial obtenida de A sea continua sobre toda la supreficie S, entonces S se llama superficie orientada.*

Además, la función $n(A)$ se denomina *campo continuo de normales.*

La superficie para la cual queda definida tal función $n(A)$ se llama *orientada con ayuda de $n(A)$*. Si decimos que S es una superficie orientada, entonces de este modo consideramos que S significa no sólo una superficie (conjunto de puntos) sino también el hecho de que ella lleva asignada la función $n(A)$ que es continua sobre S. Se dice, además, que $n(A)$ asigna un lado determinado de la superficie suave orientada (hacia donde sale de S la escobilla de vectores unitarios de $n(A)$, dependientes continuamente de A).

La misma superficie pero orientada de modo opuesto (con la escobilla de vectores unitarios normales dirigidos en el sentido contrario) es necesario ya designarla con otra letra. Dos superficies como éstas orientadas en direcciones contrarias es cómodo designarlas con las letras S_+ y S_-. Una de ellas se anota arbitrariamente por S_+ y la otra obtiene automáticamente la designación S_-.

Como ejemplo elemental de una superficie orientable se puede presentar el plano xOy. Los vectores unitarios que son perpendiculares al plano y van dirigidos en el sentido positivo del eje z definen un lado del plano y los vectores que van dirigidos en el sentido negativo del eje z, el otro lado del plano ($n(A) = \pm k$).

La superficie de un elipsoide es también orientable: el vector unitario normal salido de cualquier punto de ésta al exterior del elipsoide se prolonga, evidentemente, (de un modo unívoco!) sobre toda la superficie.

De esta manera la superficie queda orientada (está definido el *lado exterior del elipsoide*).

La orientación contraria de esta superficie se define por el vector unitario normal a ella que va hacia el interior del elipsoide (*el lado interior del elipsoide*).

Hemos visto más arriba que si S es una superficie suave definida por las ecuaciones paramétricas (1) y posee las propiedades allí

indicadas, ella es orientable. Al signo «+» le corresponde en la fórmula (3) una orientación determinada de S y al signo «—», la orientación contraria.

En general, existen asimismo superficies suaves *no orientables*.

Si torcemos la hoja rectangular $abb'a'$ (fig. 86) una vez y encolamos sus lados ab y $a'b'$ de tal modo que los puntos a, b' y b, a'

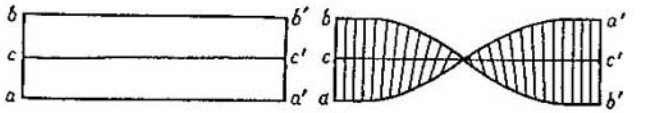

Fig. 86.

queden pegados dos a dos, obtendremos una superficie no orientable (fig. 87) llamada *cinta de Möbius*[1]).

En la fig. 86 se señala el segmento cc', o sea, la línea media de la hoja de papel rectangular. En la cinta de Möbius a esta línea le corresponde la curva cerrada cc' en la cual los puntos c y c' coinciden

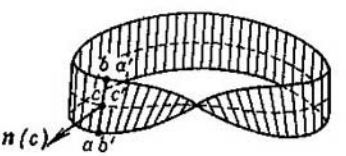

Fig. 87.

formando un solo punto. Hagamos que de c salga la normal unidad $\boldsymbol{n}(c)$ de manera arbitraria, pero determinada. Una vez escogido el sentido de $\boldsymbol{n}(c)$ (entre dos posibles), inevitablemente se determina la opción de $\boldsymbol{n}(A)$ para todos los puntos $A \in cc'$ si queremos que el vector de $\boldsymbol{n}(A)$ dependa continuamente de A. Sin embargo, en el punto c' el vector $\boldsymbol{n}(c')$ ya está escogido: puesto que c y c' coinciden. Es fácil ver que si el punto de la línea media del rectángulo se mueve continuamente de c a c', la normal unidad $\boldsymbol{n}(A)$, donde A es el punto de la cinta de Möbius, tenderá hacia $-\boldsymbol{n}(c)$ y no hacia $\boldsymbol{n}(c)$ y, por consiguiente, la función vectorial $\boldsymbol{n}(A)$ resulta discontinua en el punto $c = c' \in S$ De este modo la cinta de Möbius es inorientable

[1]) A. F. Möbius (1790—1868), matemático alemán.

§ 3.10. Sistema de coordenadas y orientación de una superficie

En el espacio tridimensional hay dos sistemas rectangulares de coordenadas esencialmente diferentes, representados en las figs. 88 y 89. Su diferencia consiste en que es imposible realizar tal movimiento de uno de los sistemas que, como resultado de ello, coincidan los puntos O y las semirrectas positivas respectivas x, y, z de ambos sistemas.

El primer *sistema* (fig. 88) se llama *derecho* y el segundo (fig. 89), *izquierdo*[1]). Si se mira de abajo arriba a lo largo del eje positivo z, entonces, para que el eje positivo x coincida con el positivo y en la

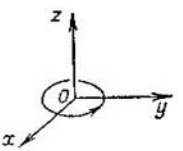

Fig. 88

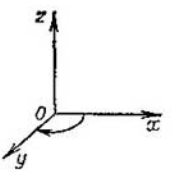

Fig. 89.

dirección más breve, es necesario girar el eje x en el plano x, y en el caso de la fig. 88 de izquierda a derecha (en el sentido de las agujas del reloj) y en el caso de la fig. 89 de derecha a izquierda (en el sentido contrario al de las agujas del reloj).

Es natural que con cada uno de los sistemas que se examinan se relacione el «sacacorchos», o sea, la combinación compuesta por el vector unitario orientado en el sentido positivo del eje z y por el círculo (cabeza del sacacorchos), perpendicular al eje z, en cuya frontera (circunferencia) se da el sentido de recorrer del eje x al eje y en la dirección más breve.

Si en el caso de la fig. 88 consideramos que z es el eje del tornillo (sacacorchos) y éste es de «rosca dextrorsa», entonces, girando la cabeza de este tornillo en dirección de la flecha, haremos que el sacacorchos se mueva en dirección del eje positivo z (sacacorchos dextrorso). Alcanzaremos el mismo efecto en el caso de la fig. 89 si el eje z es el del tornillo que tiene la rosca sinistrorsa (sacacorchos sinistrorso).

La cabeza del sacacorchos puede estar torcida, o sea, puede representar un trozo de la superficie suave, no obligatoriamente plana, pero tal que el eje z sea normal a este trozo en el punto O. También en este caso la combinación hecha de tal cabeza, en la cual se da el

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 11.

sentido del recorrido, y de la normal unidad forma un sacacorchos (dextrorso o sinistrorso).

Por último, se puede imaginar un sacacorchos dextrorso o sinistrorso con un vector normal que vaya en el sentido arbitrario que no obligatoriamente coincida con el eje z. En adelante es importante que se figure la estructura siguiente. Supongamos que en el espacio tridimensional está dado un sistema rectangular de coordenadas (dextrorso o sinistrorso) y una superficie orientada S. Ahora bien, de cada punto $P \in S$ sale la normal unidad $\boldsymbol{n}(P)$, continuamente dependiente de P. Una esfera $V(P)$ de radio suficientemente pequeño

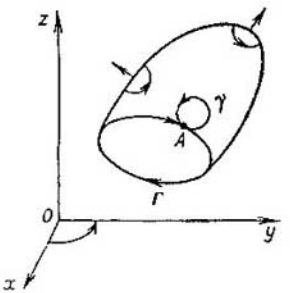

Fig. 90.

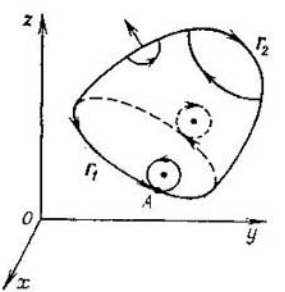

Fig. 91.

que tiene por centro el punto P entalla de la superficie S cierto trozo conexo $\sigma(P)$ que contiene el punto P. Determinemos sobre el contorno (sobre el borde) $\gamma(P)$ de este trozo el sentido de recorrer de modo que el vector $\boldsymbol{n}(P)$ y el trozo $\sigma(P)$ formen un sacacorchos orientado al igual que el sistema dado de coordenadas, o sea, si el sistema de coordenadas es dextrorso (sinistrorso), el sacacorchos asimismo debe ser dextrorso (sinistrorso).

Si la superficie S tiene el borde Γ, entonces la estructura diseñada conduce, de un modo natural, a determinada dirección del recorrido sobre Γ (fig. 90). Prestemos atención, por ejemplo, al punto A del contorno Γ. En este punto el sentido del recorrido por Γ y el del recorrido por el círculo torcido cerrado γ, perteneciente a S, coinciden.

Si la superficie dada hubiera sido orientada de un modo contrario y hubiera quedado el sistema anterior de coordenadas, los sentidos del recorrido determinados más arriba deberían ser cambiados por los opuestos.

La fig. 91 presenta una superficie orientada con un borde constituido por dos curvas suaves cerradas Γ_1 y Γ_2.

Notemos, además, el hecho siguiente. Supongamos que una superficie suave orientada S está partida por un arco suave h en dos superficies del mismo modo orientadas S_1 y S_2 (fig. 92). Entonces los sentidos del recorrido de los contornos de S_1 y S_2 a lo largo del arco h serán contrarios.

Esta observación servirá de guía para definir de un modo justo el concepto de superficie suave a trozos orientada.

Una superficie suave a trozos S se llama orientada si cada uno de sus trozos suaves está orientado y los sentidos surgidos del recorrido de los contornos de estos trozos están concordados de modo que a lo largo

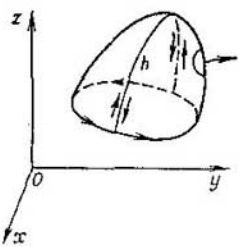

Fig. 92.

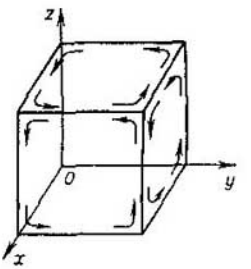

Fig. 93.

de cada arco donde dos contornos semejantes coinciden, las direcciones de sus recorridos sean contrarias.

La fig. 93. representa un cubo cuya superficie está orientada por su normal exterior.

Es cómodo considerar como vectores los trozos pequeños de una superficie orientada (elementos de la superficie).

Sea S una superficie suave orientada y, por lo tanto, de cada punto $A \in S$ sale una normal unidad $\boldsymbol{n}(A)$ a S en A, continuamente dependiente de A. Sea σ un trozo suave de S. Supongamos que $\boldsymbol{\sigma}$ es un vector cuya magnitud escalar sea igual al área $|\sigma|$ del trozo σ y cuyo sentido se determine por el vector $\boldsymbol{n}(A)$, donde A es un punto σ cualquiera. Ahora bien, $\boldsymbol{\sigma} = |\sigma| \boldsymbol{n}(A)$.

Desde luego, de esta manera el vector $\boldsymbol{\sigma}$ no está definido unívocamente. Sin embargo, si el diámetro $d(\sigma)$ es pequeño, entonces el sentido de $\boldsymbol{n}(A)$ no sale fuera de los límites de cierto cono pequeño y si σ es un trozo variable que contiene constantemente el punto fijo A_0, entonces, evidentemente, $\boldsymbol{n}(A) \to \boldsymbol{n}(A_0)$ $(d(\sigma) \to 0)$, donde $d(\sigma)$ es el diámetro de σ, sin importar el hecho de cómo se ha escogido el punto $A \in \sigma$ para cada σ.

Es natural que el elemento diferencial de una superficie orientada S en el punto $A \in S$ se considere como vector $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}(A)\, dS$ el cual, por lo tanto, será igual al producto del elemento diferencial del área

de S en el punto A por el vector de la normal unitaria $\boldsymbol{n}(A)$ que determina la orientación de S.

Si S se define por la ecuación

$$r = r(u, v) = \varphi i + \psi j + \chi k \quad ((u, v) \in \overline{G}),$$

entonces $\boldsymbol{n}(A)$ se define por una de las siguientes igualdades

$$\boldsymbol{n}(A) = \pm \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|} \tag{1}$$

y $dS = |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du\, dv$. De aquí

$$dS = \pm (\dot{r}_u \times \dot{r}_v) \, du\, dv. \tag{2}$$

A continuación suponemos que en (1) y (2) se ha escogido el signo «+». Siempre se puede alcanzar esto al cambiar, en caso de necesidad, de lugar los parámetros u y v. De este modo *si tenemos dada cierta superficie suave orientada S, siempre se puede suponer que ésta se describe por tal función vectorial $r = r(u, v)$ que la normal unidad $\boldsymbol{n}(A)$ $(A \in S)$, que determina la orientación de S, se exprese por la igualdad*

$$\boldsymbol{n}(A) = \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|} \tag{3}$$

y, respectivamente,

$$dS = (\dot{r}_u \times \dot{r}_v) \, du\, dv. \tag{4}$$

Si queremos que, al transformar los parámetros (u, v) en parámetros (u', v'), no aparezca el signo «—» en estas expresiones, es necesario que el jacobiano de la transformación $\frac{D(u, v)}{D(u', v')}$ sea positivo. En efecto,

$$\boldsymbol{n}(A) = \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|} =$$

$$= \frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)} i + \frac{D(z, x)}{D(u, v)} j + \frac{D(x, y)}{D(u, v)} k}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{D(y, z)}{D(u', v')} i + \frac{D(z, x)}{D(u', v')} j + \frac{D(x, y)}{D(u', v')} k}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{D(u', v')}{D(u, c)}}{\left|\frac{D(u', v')}{D(u, v)}\right|} =$$

$$= \frac{\dot{r}_{u'} \times \dot{r}_{v'}}{|\dot{r}_{u'} \times \dot{r}_{v'}|} \cdot \operatorname{sign} \frac{D(u', v')}{D(u, v)} \; ^{1)}.$$

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 8.18.

Ahora bien, la fórmula (3) (¡con el signo «+»!) para la normal unidad $n(A)$ (y junto con ella también la fórmula (4) *es invariante sólo respecto a las transformaciones de los parámetros con un jacobiano positivo.*

Por eso al transformar los parámetros conviene recomendar las transformaciones con jacobianos positivos.

No obstante, hay casos cuando tenemos que examinar las transformaciones con jacobiano negativo. Entonces hay que controlar especialmente la aplicación correcta de los signos.

En lo que se refiere a una superficie arbitraria orientada en el espacio x, y, z no hay ninguna razón para decir que está orientada positiva o negativamente. Otra cosa es si la superficie es plana, perteneciente a uno de los planos de coordenadas.

La región orientada G, perteneciente al plano xOy, se llama *positiva* (*negativa*) y se designa por el símbolo G_+ (G_-) si la normal unidad $n(A)$, correspondiente a la región G, es igual a k, donde k es el versor del eje z.

Esta definición concuerda con la dada en el § 3.6. Hace falta sólo suponer allí que miramos el plano xOy a partir de z positivos.

Si en esta definición sustituimos x, y por y, z o por z, x, respectivamente, así como k por el versor i del eje x o por el versor j del eje y, respectivamente, obtenemos la definición de G_+ para las regiones pertenecientes a los planos yOz, zOx.

Para las regiones G_- pertenecientes a xOy, yOz o zOx es necesario sustituir k, i, j por $-k, -i, -j$, respectivamente.

§ 3.11. Integral sobre una región plana orientada

En el § 3.6 hemos introducido el concepto de *integral de f sobre una región orientada. A saber,*

$$\int\limits_{G_+} f\,dx\,dy = \int\limits_{G} f\,dx\,dy = -\int\limits_{G_-} f\,dx\,dy.$$

Lo útil de estas definiciones se puede ver del hecho siguiente. Representemos dos planos donde se dan los sistemas rectangulares de coordenadas x, y y x', y' igualmente orientados. Supongamos que G designa una región orientada del plano x, y con frontera suave a trozos (orientada) Γ y supongamos que la transformación continuamente derivable

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y) \quad ((x, y) \in \overline{G}) \tag{1}$$

aplica la región biunívoca G sobre la región G' del plano x', y' y Γ sobre la frontera Γ' de la región G'. Supongamos que el jacobiano

$$D = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \neq 0 \text{ (sobre } G).$$

Con esta transformación el recorrido de Γ induce sobre Γ' un recorrido bien determinado y G' puede considerarse como región orientada.

Si $D > 0$, al pasar de Γ a Γ' la orientación de Γ' no cambia.

Sin embargo, si $D < 0$, los recorridos de Γ y Γ' son contrarios.

De lo dicho se deduce que para toda función $f(x, y)$ continua en la clausura $\bar{G}$ de una región orientada medible G

$$\iint_G f\,dx\,dy = \iint_{G'} f \cdot \frac{D(x, y)}{D(x', y')}\,dx'\,dy',$$

donde G' designa la región orientada correspondiente a G. En esta fórmula de sustitución de las variables el jacobiano no se escribe bajo el signo del valor absoluto.

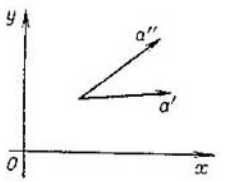

Fig. 94.

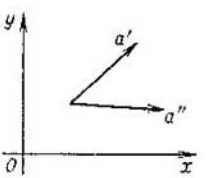

Fig. 95.

Aclaremos lo dicho respecto a la relación de la orientación de Γ con el signo D. Asignemos en el sistema rectangular de coordenadas x, y dos vectores no colineales $a' = (a'_1, a'_2)$ y $a'' = (a''_1, a''_2)$. Si el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 \\ a'_2 & a''_2 \end{vmatrix}$$

es positivo[1]), esto significa que el sistema de a' y a'' está orientado al igual que los ejes x e y (fig. 94). No obstante, si $\Delta < 0$, el sistema de a' y a'' está orientado opuestamente (fig. 95).

La transformación (1) aplica la red angular del plano x, y en curvilínea (figs. 96—98) con la particularidad de que pueden tener lugar dos casos característicos diferentes de las aplicaciones representadas en las fisg. 97 y 98.

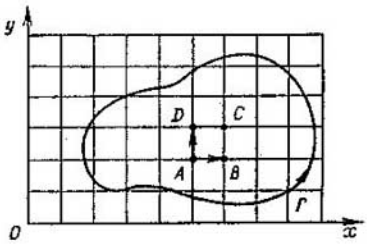

Fig. 96.

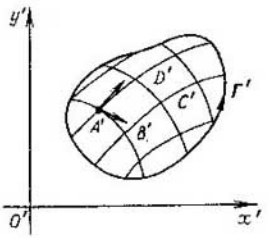

Fig. 97.

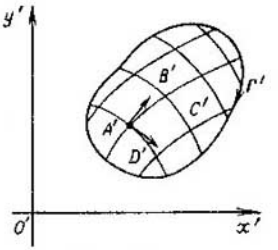

Fig. 98.

El cuadrado $ABCD$ se convierte en el paralelogramo curvilíneo $A'B'C'D'$, el vector $\overrightarrow{AB}$ se convierte, con una precisión hasta infinitésimos de orden superior en la tangente al arco $\widetilde{A'B'}$ en el punto A' definido por el vector $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}\right)$ y el vector $\overrightarrow{AD}$, en la tangente al arco $\widetilde{A'D'}$ en el punto A'definido por el vector $\left(\frac{\partial x'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial y}\right)$. Si el determinante $D' = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} > 0$, la situación de estos vectores será tal como la muestra la fig. 97 y esto conduce a que las direcciones de los recorridos en $ABCD$ y $A'B'C'D'$ coincidan y, por consiguiente, coincidan los sentidos de los recorridos de Γ y Γ'.

Sin embargo, si $D' < 0$ ($DD' \equiv 1$), la situación de los vectores tangentes a $\widetilde{A'B'}$ y $\widetilde{A'D'}$ uno respecto al otro cambia por la contraria lo cual conlleva (fig. 98) a que los recorridos de Γ y Γ' sean contrarios.

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 12.

Análogamente se determinan las integrales para las regiones G_+ y G_- definidas sobre otros planos de coordenadas yz y zx.

§ 3.12. Flujo de un vector a través de una superficie orientada

En el espacio tridimensional $E = E_3$ con el sistema rectangular de coordenadas x, y, z está dada la región H y sobre ella se define el campo del vector continuo

$$a(x, y, z) = Pi + Qj + Rk.$$

En la región H se da la superficie suave orientada S^*

$$r = r(u, v) = \varphi i + \psi j + \chi k$$

$$((u, v) \in \Omega, \ |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| > 0), \tag{1}$$

donde Ω es la región provista de frontera suave a trozos en el plano de los parámetros (u, v) y φ, ψ, χ son las funciones continuamente derivables sobre $\overline{\Omega}$. Suponemos que la normal unidad a S^* se define por la igualdad vectorial (conforme a lo dicho, véase el § 3.10, (1) y (3))

$$n(A) = \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|}. \tag{2}$$

Entonces los cosenos de los ángulos de la normal $n = n(A)$ con los ejes x, y, z se expresan por las igualdades

$$\left.\begin{aligned} \cos(n, x) &= \varkappa \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \cos(n, y) = \varkappa \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \\ \cos(n, z) &= \varkappa \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad \varkappa = 1/|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Designemos, además, por S una misma superficie igual, pero no orientada: la orientación está excluida de ella.

Se llama flujo del vector a a través de la superficie orientada S^* la magnitud designada del modo siguiente:

$$\int_{S^*} (a\, dS^*)$$

y definida por la igualdad

$$\int_{S^*} (a\, dS^*) = \int_S (an)\, dS \tag{4}$$

cuyo segundo miembro es la integral de superficie de primer género del producto escalar

$$(an) = P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z)$$

*del vector a y de la normal unidad que define la orientación de S**

Por cuanto (an) es una función continua del punto $A \in S$, entonces en el segundo miembro de (4) existe la integral de primer género sobre S lo cual ha sido demostrado en el § 3.8. La expresión dada en el primer miembro de (4) se llama *integral de superficie de segundo género*[1]).

Supongamos, por ejemplo, que en el campo H tiene lugar la corriente estacionaria de un líquido de tal modo que su velocidad a en un punto cualquiera $A \in H$ dependa de A y no dependa del tiempo. El flujo de la velocidad del líquido a través de la superficie orientada S^* es su cantidad que pasa, en unidad de tiempo, por S en el sentido en que está orientada S.

Es válida la igualdad

$$\int_S (an)\,dS = \int_S (P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z))\,dS =$$

$$= \int\int_\Omega \left(P\frac{D_1^*(y, z)}{D(u, v)} + Q\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right) du\,dv, \quad (5)$$

donde en el segundo miembro está una integral múltiple (doble) habitual sobre la región; en esta integral en P, Q, R es necesario sustituir x, y, z por las correspondientes funciones φ, ψ, χ de u, v. Esta igualdad se deduce de (3) y de la fórmula (3) del § 3.8.

A veces es cómodo calcular la integral (5) en las coordenadas cartesianas. Mostremos a qué cálculos lleva esto, suponiendo que un trozo suave $\bar{S}$ de la superficie se proyecta biunívocamente sobre las partes medibles de los tres planos de coordenadas. Muchas superficies planas se pueden partir en un número finito de tales trozos.

Supongamos, pues, que el trozo suave $\bar{S}$ se describe por cualquiera de las tres funciones

$$x = f_1(y, z) \quad ((y, z) \in \bar{S}_x),$$
$$y = f_2(z, x) \quad ((z, x) \in \bar{S}_y),$$
$$z = f_3(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{S}_z)$$

que son continuas en las proyecciones de $\bar{S}$ sobre los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, respectivamente, y tienen las derivadas parciales continuas, hablando en general, sólo dentro de estas proyecciones S_x, S_y, S_z (conjuntos medibles).

[1]) La otra designación de la integral de segundo género véase a continuación: el segundo miembro de (6) y (7).

Designemos, además, por S_x^*, S_y^*, S_z^* las proyecciones orientadas respectivas de la superficie orientada S^* sobre los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. El recorrido del contorno de S^* determina al proyec-

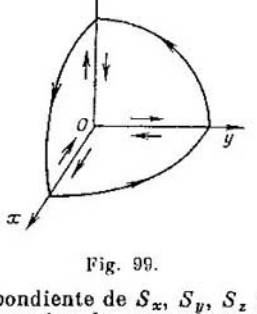

Fig. 99.

tar el recorrido correspondiente de S_x, S_y, S_z (fig. 99). La normal n a S forma con el eje z un ángulo cuyo coseno es igual a

$$\cos(n, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \left(p = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \; q = \frac{\partial f_3}{\partial y}\right),$$

donde es necesario tomar «+» ó «—» según la orientación de S^*. Tenemos (véase el § 3.8, (4) y el § 3.10)

$$\int_S R \cos(n, z)\, dS =$$

$$= \int_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) \frac{\pm 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy =$$

$$= \pm \int_{S_z} R(x, y, f_3(x, y))\, dx\, dy =$$

$$= \int_{S_z^*} R(x, y, f_3(x, y))\, dx\, dy = \int_{S^*} R(x, y, z)\, dx\, dy, \quad (6)$$

donde la penúltima integral está tomada sobre S_z^* orientada (véase el § 3.8). En lo que se refiere a la última integral de esta cadena, ésta se debe considerar como designación de la penúltima. Es la así llamada integral de *segundo género*. Para calcularla es necesario sustituir z por $f_3(x, y)$ e integrar sobre la proyección orientable S_z^*. Del § 3.8 sabemos que $\int_{S_z^*} = \pm \int_{S_z}$, donde debe tomarse «+» ó «—» en dependencia del hecho de cómo será orientada S_z^*: positiva o negativamente (véase también el § 3.6). Los razonamientos análogos

pueden ser llevados a cabo también respecto a las demás dos integrales (fig. 99):

$$\int\limits_S P\cos(n, x)\,dS = \int\limits_{S_x^*} P(f_1(y, z), y, z)\,dy\,dz = \int\limits_{S^*} P(x, y, z)\,dy\,dz,$$

$$\int\limits_S Q\cos(n, y)\,dS = \int\limits_{S_y^*} Q(x, f_2(z, x), z)\,dz\,dx = \int\limits_{S^*} Q(x, y, z)\,dz\,dx.$$

Hemos demostrado que el flujo del vector a a través de la superficie orientada S^*, definida por la normal n, se puede calcular por la fórmula

$$\int\limits_S (an)\,dS = \int\limits_{S^*} (P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R(x, y, z)\,dx\,dy) \tag{7}$$

Si la superficie S^* puede ser cortada en un número finito de partes, $S^* = \sum S_k^*$, cada una de las cuales se proyecta sobre los tres planos de coordenadas, entonces, para calcular el flujo de a a través de S^*, se puede calcular los flujos de a a través de cada uno de los trozos de S_k^*, haciéndose uso del procedimiento indicado, y sumarlos.

Una superficie esférica que tiene por centro el punto nulo del sistema de coordenadas se corta, naturalmente, por los planos de coordenadas en ocho trozos que poseen la propiedad indicada.

Como ya hemos notado más arriba, la expresión del segundo miembro de (7) se llama *integral de segundo género sobre una superficie*.

Observación 1. Si la superficie orientable $S = G$ en el espacio (x_1, x_2, x_3) es un trozo del plano de coordenadas (su ecuación es $x_j = 0$ para cierto $j = 1, 2, 3$), entonces el flujo del vector a a través de G_+ es simplemente una integral doble de la proyección respectiva del vector a sobre el eje respectivo. En particular, si G_+ es una parte del plano $x_3 = 0$ con la normal $n(A) = +k$, entonces $(\cos(n, z) = 1)$

$$\int\limits_S (an)\,dS = \int\limits_S R(x_1, x_2, 0)\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_{G_+} R(x_1, x_2, 0)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int\limits_G R(x_1, x_2, 0)\,dx_1\,dx_2.$$

Inversamente, si se da, por ejemplo, una integral doble que tiene la forma

$$\int\limits_G f(x, y)\,dx\,dy,$$

se puede interpretarla como flujo del vector a a través de G_+ cuya proyección sobre el eje z es igual a $R(x, y, z) = f(x, y)$.

Observación 2. La integral de segundo género del vector a sobre la superficie orientada S^* varía al cambiarse la orientación de la superficie (a saber, cambia el signo).

En efecto, supongamos que S_-^* designa la misma superficie que S^*, pero orientada contrariamente. Entonces

$$\int_{S^*} (a\, dS^*) = \int_S (an)\, dS$$

y

$$\int_{S_-^*} (a\, dS_-^*) = \int_S (a, -n)\, dS = -\int_S (an)\, dS = -\int_{S^*} (a\, dS^*).$$

§ 3.13. Divergencia. Teorema de Gauss—Ostrogradski [1]

Sean E el espacio tridimensional donde se da el sistema rectangular de coordenadas x, y, z y $G \subset E$ la región provista de frontera suave a trozos S sobre la cual está definido el campo del vector

$$a(x, y, z) = Pi + Qj + Rk \quad ((x, y, z) \in G). \tag{1}$$

Supongamos que P, Q, R, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ son continuas sobre $\overline{G}$, de donde se deduce que para el vector a tiene el significado la función continua

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad ((x, y, z) \in \overline{G}), \tag{2}$$

llamada *divergencia del vector a.*

Es fácil ver que

$$\operatorname{div} a = \nabla a \quad \left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\right),$$

o sea, la divergencia es igual al producto escalar del vector simbólico ∇ *(operador de Hamilton)* (véase el § 3.4) *y del vector a.*

Vamos a considerar que la superficie S está orientada con ayuda de la normal unidad n dirigida al exterior de G.

[1] K. F. Gauss (1777—1855), célebre matemático alemán. M. V. Ostrogradski (1801—1861), célebre matemático ruso.

Nuestro objetivo consistirá en demostrar la igualdad

$$\int_G \operatorname{div} a \, dG = \int_S (an) \, dS \tag{3}$$

para ciertas condiciones adicionales que se imponen sobre G. Esta igualdad se llama *fórmula de Gauss—Ostrogradski*, en honor de los matemáticos que la demostraron.

La fórmula de Gauss—Ostrogradski reza que la *integral de volumen (triple) de la divergencia del vector sobre la región G es igual al flujo del vector a través de la frontera de esta región, orientada en el sentido de su normal exterior.*

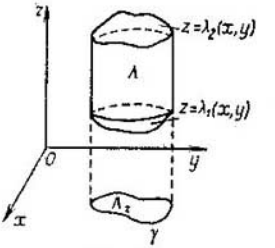

Fig. 100.

Examinemos primero la región Λ representada en la fig. 100 a la cual llamaremos *H_z-región elemental*. La región Λ está limitada inferior y superiormente por las superficies σ_1 y σ_2, con bordes suaves a trozos, que se definen, respectivamente, por las ecuaciones

$$z = \lambda_1 (x, y), \; z = \lambda_2 (x, y),$$
$$\lambda_1 (x, y) \leqslant \lambda_2 (x, y) \quad ((x, y) \in \overline{\Delta}_z),$$

donde Δ_z es la región plana con frontera suave a trozos γ y λ_1, λ_2 son continuas sobre $\overline{\Delta}_z$ y tienen las derivadas parciales continuas sobre el conjunto abierto Δ_z. A la izquierda y la derecha la región Λ está limitada por la superficie cilíndrica σ^* con la directriz γ y la generatriz paralela al eje z.

Sea S^* la frontera de Λ orientada con ayuda de la normal exterior a Λ (las explicaciones se dan a continuación). De este modo los trozos inferior y superior σ_1^* y σ_2^*, al igual que la superficie lateral σ^* de la región Λ, están orientados correspondientemente. Para la región Λ tienen lugar las igualdades (las explicaciones se dan a continuación)

$$\int_\Lambda \frac{\partial R}{\partial z} \, d\Lambda = \int_{\Delta_z} \int dx \, dy \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz =$$

$$= \int_\Lambda \int \{R (x, y, \lambda_2 (x, y)) - R (x, y, \lambda_1 (x, y))\} \, dx \, dy =$$

$$= \int_{\sigma_{2, z}^*} R (x, y, \lambda_2 (x, y)) \, dx \, dy + \int_{\sigma_{1, z}^*} \int R (x, y, \lambda_1 (x, y)) \, dx \, dy =$$

$$= \int_{S^*} \int R (x, y, z) \, dx \, dy. \tag{4}$$

La normal n a σ_1^* y σ_2^* forma con el eje z los ángulos obtuso y agudo, respectivamente, por eso las proyecciones $\sigma_{1,z}^*$ y $\sigma_{2,z}^*$ de los trozos σ_1^* y σ_2^* sobre el plano $z = 0$ están orientadas: la primera en dirección negativa y la segunda en dirección positiva. Esto argumenta el paso del tercer término de la cadena (4) al cuarto. A la suma que forma el cuarto término se le puede agregar formalmente la integral

$$\iint_{\sigma^*} R(x, y, z)\, dx\, dy = 0$$

igual a cero, porque cos $(n, z) = 0$ a lo largo de σ^*. Pero entonces la suma de tres integrales obtenida es igual a la integral que ocupa el último término de la cadena (4) (al flujo del vector $(0, 0, R)$ a través de S^*).

Hemos demostrado el teorema de Gauss—Ostrogradski para la H_z-región elemental y el vector $(0, 0, R)$.

Llamemos ahora a la región *G H_z-región* si su clausura $\overline{G}$ puede ser partida en un número finito de H_z-regiones elementales

$$\overline{G} = \sum_{k=1}^{N} \overline{G}_k$$

de modo que los trozos inferiores y superiores de la frontera de G_k sean partes de la frontera orientada S^* de la región G y demostremos que para G y el vector $(0, 0, R)$ es válido también el teorema de Gauss—Ostrogradski.

En efecto, designemos por $S_{1,k}$ y $S_{2,k}$ los trozos inferiores y superiores de las fronteras de $\overline{G_k}$, respectivamente, y por S_k, los trozos laterales de G_k. Entonces (las explicaciones se dan a continuación)

$$\int_G \frac{\partial R}{\partial z} dG = \sum_{k=1}^{N} \int_{G_k} \frac{\partial R}{\partial z} dG = \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{S_{1,k}^*} R(x, y, z)\, dx\, dy + \right.$$

$$\left. + \int_{S_{2,k}^*} R(x, y, z)\, dx\, dy + \int_{S_k^*} R(x, y, z)\, dx\, dy \right) = \int_{S^*} R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

porque las integrales sobre S_k^*, evidentemente, son iguales a cero y los trozos $S_{1,k}^*$ y $S_{2,k}^*$ bien sea forman en conjunto la superficie S^*, bien sea, si no es así, el conjunto

$$\sigma = S^* - \sum_{1}^{N} S_{1,k}^* - \sum_{1}^{N} S_{2,k}^*$$

es una parte de S^*, la normal en todo punto de la cual es perpendicular al eje z. Pero entonces la integral sobre σ es igual a cero.

Por analogía, se pueden introducir los conceptos de H_x-región y de H_y-región. Por ejemplo, H_x-región posee la propiedad consis-

tente en que se puede partir su clausura en un número finito de clausuras de H_x-regiones elementales. En este caso la H_x-región elemental se define al igual que la H_z-región elemental sólo que ahora es x que desempeña el papel de z. Por analogía, se demuestra que para H_x-región de G tiene lugar la igualdad

$$\int_G \frac{\partial P}{\partial x}\, dG = \int\int_{S^*} P(x, y, z)\, dy\, dz,$$

o sea, la fórmula de Gauss—Ostrogradski para el vector $(P, 0, 0)$ y para la H_y-región de G tiene lugar la fórmula

$$\int_G \frac{\partial Q}{\partial y}\, dG = \int\int_{S^*} Q(x, y, z)\, dz\, dx.$$

Si G es simultáneamente H_x-, H_y- y H_z-región, para ella, evidentemente, será justo el teorema de Gauss—Ostrogradski para un vector arbitrario $a = (P, Q, R)$ continuamente derivable sobre $\overline{G}$, o sea, para ella es justa la igualdad

$$\int\int\int_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \int\int_{S^*} (P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dz\, dx + R(x, y, z)\, dx\, dy), \quad (5)$$

donde la integral en el segundo miembro es la integral sobre la superficie S^* orientada por la normal exterior a G.

Si en la fórmula de Gauss—Ostrogradski se pone $P = x$, $Q = y$, $R = z$, se obtiene la expresión para el volumen de la región G

$$|G| = \frac{1}{3} \int\int_{S^*} (x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy)$$

a través de la integral tomada sobre su frontera S^* orientada (por la normal exterior).

Las regiones de las cuales generalmente se trata son simultáneamente H_x-, H_y- y H_z-regiones.

EJEMPLO 1. La esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ es una H_z-región, incluso una H_z-región elemental, porque todo su interior está limitado por dos superficies suaves sobre el círculo $x^2 + y^2 < 1$ que están una por encima de la otra

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

y son continuas sobre el círculo cerrado $x^2 + y^2 \leqslant 1$ que tiene una frontera suave. Es evidente que la esfera es asimismo una H_x- y H_y-región.

EJEMPLO 2. *Toro.* Asignemos en el plano (x, y) una circunferencia de radio a que tenga por centro el punto $(b, 0)$ $(0 < a < b)$. Su ecuación tendrá la forma $(x - b)^2 + y^2 = a^2$. La revolución de la circunferencia dada como cuerpo sólido en el espacio (x, y, z) alrededor del eje y engendrará la superficie T llamada *toro* (la fig. 101

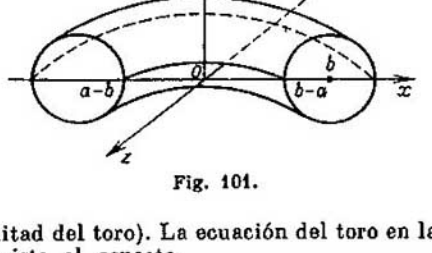

Fig. 101.

muestra una mitad del toro). La ecuación del toro en las coordenadas cartesianas reviste el aspecto

$$(\sqrt{x^2+z^2}-b)^2+y^2=a^2.$$

Para convencerse de que T es una H_y-región es suficiente dividir la superficie T en dos partes por medio del plano x, z. Luego, los planos $x = b - a$, $x = a - b$ parten T en cuatro H_x-regiones elementales y los planos $z = b - a$ y $z = a - b$, en cuatro H_x-regiones elementales.

La fórmula de Gauss—Ostrogradski transforma la integral de volumen en la de superficie.

Para aclarar el sentido físico del concepto de divergencia admitiremos que en G tiene lugar una corriente estacionaria del líquido cuya velocidad en un punto arbitrario (x, y, z) es igual a $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$. Asignemos un punto arbitrario, pero fijo $A = (x, y, z) \in G$ y rodeémoslo por la esfera $V_\varepsilon \subset G$ de radio $\varepsilon > 0$. Sea S_ε^* su frontera (superficie esférica) orientada por medio de la normal exterior. Entonces en virtud de la fórmula de Gauss—Ostrogradski,

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = \iiint\limits_{V_\varepsilon} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz.$$

El primer miembro de esta igualdad expresa la cantidad del líquido que sale de V_ε (fuera de S_ε) por unidad de tiempo. Aplicando a su segundo miembro el teorema del medio, obtenemos

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} (\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}) = |\, V_\varepsilon \,| \operatorname{div} \boldsymbol{a}_1, \qquad (6)$$

donde $|V_\varepsilon|$ es el volumen V_ε y a_1, la velocidad del líquido en cierto punto de V_ε. Dividiendo ambos miembros de la igualdad obtenida por $|V_\varepsilon|$ y pasando al límite para $\varepsilon \to 0$, en virtud de la continuidad de div a, hallaremos que existe el límite igual a la divergencia de a:

$$\operatorname{div} a = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|V_\varepsilon|} \iint_{S_\varepsilon} (a\, dS) \tag{7}$$

en el punto (x, y, z). Ahora bien, div a no es más que la productividad de los manantiales distribuidos continuamente sobre G en el punto $A = (x, y, z)$. Si en el punto A (o por doquier sobre G) div $a = 0$, esto quiere decir que en A (o por doquier sobre G) la productividad de los manantiales es igual a cero. Si div $a < 0$, esto significa que de hecho tiene lugar el desagüe.

De las consideraciones físicas es evidente que div a es invariante respecto a cualesquiera transformaciones de las coordenadas rectangulares. Sin embargo, esta conclusión se puede sacar también sobre la base de consideraciones matemáticas.

Como sabemos (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 18), el producto escalar de los vectores es invariante al transformar las coordenadas, por eso la divergencia (igual al producto escalar del vector simbólico ∇ y el vector a) es invariante respecto a las transformaciones de las coordenadas rectangulares. Desde luego, consideramos (por definición) que las coordenadas del vector simbólico $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ se transforman por las mismas fórmulas que las coordenadas de los vectores corrientes. Más exactamente, si las fórmulas de transformación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) del punto (vector) en el primer sistema de coordenadas a las coordenadas (y_1, y_2, y_3) en el segundo sistema tiene la forma

$$y_l = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} x_s \quad (l = 1, 2, 3), \tag{8}$$

donde $\alpha = (\alpha_{kl})$ es la matriz ortogonal correspondiente, entonces

$$\frac{\partial}{\partial y_l} = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} \frac{\partial}{\partial x_s} \quad (l = 1, 2, 3). \tag{9}$$

El operador de Hamilton se aplica a la función derivable f. Como resultado obtenemos el vector

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

llamado, como sabemos, *gradiente de la función f*. En este cálculo la función f se considera escalar. Ahora bien, $\nabla f = \operatorname{grad} f$ es el producto del vector ∇ por el escalar f: el resultado es el vector.

En el sistema de coordenadas (y_1, y_2, y_3)

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial y_3} \right) = \frac{\partial f}{\partial y_1} i_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} j_1 + \frac{\partial f}{\partial y_3} k_1,$$

donde i_1, j_1, k_1 son los versores del sistema (y_1, y_2, y_3). En este caso en virtud de (9)

$$\frac{\partial f}{\partial y_l} = \left(\alpha_{l1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_{l2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_{l3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f =$$

$$= \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} \frac{\partial f}{\partial x_s} \quad (l = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Las fórmulas (10) concuerdan con las reglas de derivación de la función compuesta $f(x_1, x_2, x_3)$ en la cual

$$x_s = \sum_{l=1}^{3} \alpha_{ls} y_l \quad (s = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Las fórmulas (11) son inversas a las de (8) ($\alpha^{-1} = \alpha^*$, o sea, las coordenadas x_s se expresan por las coordenadas y_k con ayuda de la s-ésima columna de la matriz α).

Aquí hemos obtenido las fórmulas (10) valiéndonos sólo del cálculo simbólico.

Pues, si un mismo campo del vector está definido en dos sistemas de coordenadas (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) por las funciones respectivas $a = a_1(x_1, x_2, x_3)\, i + a_2(x_1, x_2, x_3)\, j + a_3(x_1, x_2, x_3)\, k = b_1(y_1, y_2, y_3)\, i_1 + b_2(y_1, y_2, y_3)\, j_1 + b_3(y_1, y_2, y_3)\, k_1$, donde las coordenadas (b_1, b_2, b_3) están relacionadas con las (a_1, a_2, a_3) por las fórmulas (8) y (11), entonces en un mismo punto

$$\operatorname{div} a = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial b_l}{\partial y_l} = \sum_{l=1}^{3} \left(\sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} \frac{\partial}{\partial x_s} \right) b_l = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sum_{l=1}^{3} \alpha_{ls} b_l \right) = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial a_s}{\partial x_s}.$$

Ahora bien, hemos demostrado una vez más la invariación de la divergencia durante las transformaciones de las coordenadas rectangulares, utilizando sólo el cálculo simbólico.

La fórmula de Gauss—Ostrogradski puede ser escrita en el caso plano cuando G es la región en el plano (x, y) y

$$a(x, y) = P(x, y)\, i + Q(x, y)\, j$$

es un campo definido sobre ella. Si $\boldsymbol{n}\,(A)$ es la normal exterior al contorno suave a trozos Γ de la región G $(A \in \Gamma)$, entonces tendrá lugar la igualdad

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_\Gamma (a\boldsymbol{n})\,ds,$$

donde ds es la diferencial del arco Γ.

Si se supone que el sentido de la tangente en el punto Γ coincide con el sentido positivo de recorrido sobre Γ a lo largo del cual se

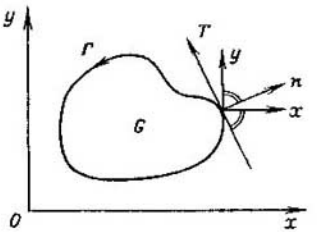

Fig. 102.

calcula también la longitud del arco del contorno Γ, entonces (fig. 102).

$$\cos(\boldsymbol{n}, x) = \cos(\boldsymbol{T}, y) = \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\cos(\boldsymbol{n}, y) = \cos[\pi - (\boldsymbol{T}, x)] = -\cos(\boldsymbol{T}, x) = -\frac{dx}{ds}.$$

Por eso

$$(a\boldsymbol{n})\,ds = P\,dy - Q\,dx,$$

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_\Gamma (P\,dy - Q\,dx).$$

Si en esta fórmula sustituimos P y Q por Q y $-P$, respectivamente, llegamos a la fórmula de Green que ha sido obtenida en el § 3.7.

§ 3.14. Campo solenoidal

El campo (región) Ω del vector $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ se llama *solenoidal (tubular)* si la divergencia de $\boldsymbol{a}$ sobre Ω es igual a cero:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

En virtud del teorema de Gauss—Ostrogradski para un campo solenoidal tiene lugar la igualdad

$$\iint_S (an)\, dS = \iiint_\omega \operatorname{div} a\, dx\, dy\, dz = 0$$

para toda superficie S suave a trozos cerrada orientada (fuera de ω) la cual es la frontera de la región $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, o sea, se encuentra estrictamente dentro de Ω.

En particular, si

$$S = S_1 + S_2,$$

como en la fig. 103, entonces

$$\iint_{S_1} (an)\, dS + \iint_{S_2} (an)\, dS = 0$$

o bien

$$\iint_{S_1} (an)\, dS = \iint_{S_2^-} (an)\, dS,$$

donde S_2^- es una superficie igual a S_2, pero orientada contrariamente (dentro de ω).

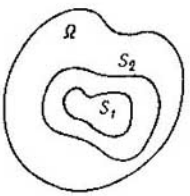

Fig. 103.

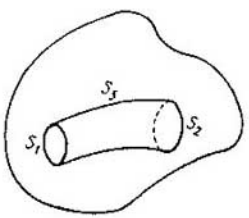

Fig. 104.

Examinemos en Ω la región ω de la forma especial (fig. 104), o sea, el tubo con la frontera S que se compone de tres trozos suaves:

$$S = S_1 + S_2 + S_3;$$

de este modo, según la condición, en todo punto de S_3 el vector a es tangente a S_3. Entonces

$$\iint_{S_3} (an)\, dS = 0$$

y

$$\iint_{S_1} (an)\, dS + \iint_{S_2} (an)\, dS = 0$$

o bien

$$\iint_{S_1} (an)\, dS = \iint_{S_2} (an)\, dS.$$

De aquí vemos que el flujo del vector a a través de S_2 es igual a este mismo flujo a través de S_1, o sea, si, por ejemplo, $a\,(x,\ y,\ z)$ es la velocidad de un líquido que fluye en Ω, entonces la cantidad de líquido que entra en el tubo por unidad de tiempo será igual a la cantidad que sale del mismo.

§ 3.15. Fórmula de Stokes

Admitamos que en cierta región del espacio E_3 está dado el campo del vector continuamente derivable

$$a = P\,(x,\ y,\ z)\,i + Q\,(x,\ y,\ z)\,j + R\,(x,\ y,\ z)\,k.$$

En el § 3.4 hemos definido el concepto de rotor del vector a:

$$\operatorname{rot} a = \nabla \times a = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) k.$$

Del álgebra vectorial se sabe (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 18) que el producto vectorial de dos vectores es invariante respecto a las transformaciones de los sistemas rectangulares con una misma orientación, o sea, tales que el sistema dextrorso se convierte en dextrorso y el sinistrorso en sinistrorso. Por eso $\operatorname{rot} a = \Delta \times a$ es invariante respecto a las transformaciones de los sistemas rectangulares de coordenadas que no cambian su orientación. Por consiguiente, podemos, sin calcular, decir que si nuestro vector a tiene en el nuevo (asimismo orientado) sistema rectangular de coordenadas los componentes

$$a = P_1\,(x',\ y',\ z')\,i' + Q_1\,(x',\ y',\ z')\,j' + R_1\,(x',\ y',\ z')\,k',$$

entonces tendrá lugar la igualdad

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k =$$

$$= \left(\frac{\partial R_1}{\partial y'} - \frac{\partial Q_1}{\partial z'}\right) i' + \left(\frac{\partial P_1}{\partial z'} - \frac{\partial R_1}{\partial x'}\right) j' + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x'} - \frac{\partial P_1}{\partial y'}\right) k',$$

donde i', j', k' son los versores unitarios en el sistema $(x',\ y',\ z')$.

Si el contorno orientado Γ está cerrado, entonces a la integral curvilínea de a tomada a lo largo de este contorno la llamaremos *circulación del vector a por* Γ y la designaremos por el símbolo

$$\int_\Gamma (a\, dl) = \int_\Gamma (P\, dx + Q\, dy + R\, dz).$$

Aquí dl es el vector dirigido en el sentido positivo de la tangente a Γ, vector cuya longitud es igual a la diferencial del arco Γ.

Nuestro objetivo consiste en argumentar la *fórmula de Stokes*

$$\iint\limits_{S^*} (\operatorname{rot} a\, dS^*) = \iint\limits_{S} (n \operatorname{rot} a)\, dS = \int\limits_{\Gamma} (a\, dl) \qquad (1)$$

que expresa el hecho de que el *flujo del vector* rot a *a través de la superficie orientada* S^* *es igual a la circulación de* a *por el contorno* Γ *de esta superficie, orientado correspondientemente a la orientación de* S^*. Notemos que por S^* hemos designado la superficie S orientada de cierto modo. Comencemos con la demostración del teorema de Stokes (o sea, de la fórmula (1)) para un trozo suave que se proyecta biunívocamente sobre los tres planos de coordenadas.

Asignemos el trozo suave orientado S^* de una superficie provista de un borde suave a trozos Γ que se puede escribir por tres procedimientos:

$$z = f_1(x, y) \quad (x, y) \in S_z,$$
$$x = f_2(y, z) \quad (y, z) \in S_x,$$
$$y = f_3(z, x) \quad (z, x) \in S_y.$$

De este modo se supone que cada una de estas ecuaciones se resuelve respecto a cada una de las variables y las funciones f_1, f_2, f_3 son continuamente derivables en las proyecciones respectivas de S sobre los planos de coordenadas. Tenemos

$$\iint\limits_{S} (n \operatorname{rot} a)\, dS = \iint\limits_{S} \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} dS. \qquad (2)$$

Escojamos en el segundo miembro de (2) los términos que contienen P. Entonces (las explicaciones se dan a continuación)

$$-\iint\limits_{S} \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} \cos(n, z) - \frac{\partial P}{\partial z} \cos(n, y) \right\} dS =$$
$$= -\iint\limits_{S} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos(n, z)\, dS =$$
$$= -\iint\limits_{S_z^*} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_z} P(x, y, f_1(x, y))\, dx = \int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\, dx. \qquad (3)$$

Puesto que grad $(f_1(x, y) - z)$ es ortogonal a la superficie $z = f_1(x, y)$, los cosenos directores de la normal en el punto $(x, y, f_1(x, y))$ son proporcionales a las coordenadas del gradiente:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} : \frac{\partial f_1}{\partial y} : (-1) = \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z),$$

de donde

$$\cos(n, y) = -\frac{\partial f_1}{\partial y} \cos(n, z)$$

lo que origina la primera igualdad en la cadena (3). La segunda igualdad se deduce del § 3.12, fórmula (6), y de la regla de derivación de una función compuesta. La tercera igualdad resulta de la fórmula de Green y, por fin, la última se deriva del hecho de que las ecuaciones del contorno Γ tienen la forma

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s) = f_1(\varphi(s), \psi(s)),$$

o sea, en ambas últimas integrales curvilíneas de (3)

$$dx = \varphi'(s)\, ds$$

y sobre el contorno Γ_z

$$P(x, y, f_1(x, y)) = P(\varphi(s), \psi(s), f_1(\varphi(s), \psi(s))) = P(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))$$

lo que que es igual a $P(x, y, z)$ sobre Γ.

Por analogía se demuestra que

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos(n, z) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(n, x) \right) dS = \int_\Gamma Q(x, y, z)\, dy, \quad (4)$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos(n, x) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(n, y) \right) dS = \int_\Gamma R(x, y, z)\, dz. \quad (5)$$

De (3), (4) y (5) se deduce la fórmula de Stokes (1).

Hemos demostrado la fórmula de Stokes para un trozo de la superficie orientable el cual se proyecta simultáneamente sobre los tres planos de coordenadas. Existe, además, un caso sencillo importante que directamente no está incluido en nuestro examen. Se trata del caso cuando σ^* es un trozo perteneciente a cierto plano paralelo a uno de los ejes de coordenadas. Para tal trozo el teorema de Stokes es asimismo justo. De esto puede cerciorarse, efectuando cálculos directos semejantes a los de (3). Sin embargo, se puede razonar así. Las integrales que forman parte de la fórmula de Stokes son invariantes respecto a las transformaciones de las coordenadas rectangulares que no cambian las orientaciones de estas últimas. Siempre se puede seleccionar este tipo de transformaciones de modo que σ^* se proyecte sobre cualquiera de los planos de coordenadas del nuevo

sistema (por ejemplo, hagamos coincidir nuestro plano con el que pasa por los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). En este caso el teorema también quedará demostrado.

La fórmula de Stokes es justa para toda superficie orientada S^*, con un borde suave a trozos Γ, que se puede partir con ayuda de las líneas suaves a trozos en un número finito de trozos suaves que se proyectan sobre los tres planos de coordenadas.

En efecto, sea $S^* = \sigma_1^* + \ldots + \sigma_N^*$ una partición de este tipo y sean $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ los contornos respectivamente orientados de $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_N^*$. Entonces, de acuerdo con lo demostrado anteriormente,

$$\iint_S (\operatorname{rot} a\, d\sigma) = \sum_{j=1}^{N} \iint_{\sigma_j} (\operatorname{rot} a\, d\sigma) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} (a\, dl) = \int_{\Gamma} (a\, dl)$$

porque las partes de las integrales $\int_{\Gamma_j}$ $(j = 1, \ldots, N)$ que se toman a lo largo de los trozos interiores de Γ_j (no pertenecientes a Γ) se pasan dos veces en el sentido opuesto y proporcionan un efecto igual a cero.

La superficie orientada que se puede partir en un número finito de triángulos (planos) se llama superficie *poliedral* y es un ejemplo de superficie elemental a la cual es aplicable la fórmula de Stokes.

Hagamos una observación más. Sea σ_ε^* una superficie circular orientada de radio ε que tiene por centro el punto $A = (x, y, z)$ y el vector unidad n que la orienta y sea γ_ε el contorno orientado de esta superficie. Con arreglo a la fórmula de Stokes

$$\int_{\gamma_\varepsilon} (a\, dl) = \int_{\sigma_\varepsilon} (n \operatorname{rot} a)\, d\sigma_\varepsilon = \int_{\sigma_\varepsilon} \operatorname{rot}_n a\, d\sigma_\varepsilon = |\sigma_\varepsilon| \cdot \operatorname{rot}_n a_1,$$

donde $\operatorname{rot}_n a$ es la función escalar igual a la proyección de rot a sobre el sentido de n y $\operatorname{rot}_n a_1$ es el valor de esta función en cierto punto medio σ_ε. De aquí resulta que el valor de la función $\operatorname{rot}_n a$ en el punto A es igual a

$$\operatorname{rot}_n a = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\sigma_\varepsilon|} \int_{\gamma_\varepsilon} (a\, dl), \qquad (6)$$

donde, pasando al límite para $\varepsilon \to 0$, se supone que el vector n es invariable. Cualquiera que sea el sistema dextrorso (sinistrorso) de coordenadas, el segundo miembro de (6) es un mismo número. Sin embargo, al sustituir el sistema dextrorso por el sinistrorso manteniendo invariable n, el sentido del recorrido de σ_ε cambia por el opuesto lo que produce el cambio del signo en el segundo miembro

de (6). Ahora bien, hemos vuelto a convencernos, por otra vía, de que rot a es invariante respecto a las transformaciones de las coordenadas rectangulares que conservan la orientación de estas últimas.

Observación. Vamos a citar varias fórmulas con la participación del operador de Hamilton ∇ que son útiles en el análisis vectorial.

Tenemos

$$\operatorname{div} a = (\nabla, a), \quad \operatorname{rot} a = \nabla \times a, \quad \operatorname{grad} f = \nabla f,$$

donde f es la función escalar y a, el vector.

1) $\operatorname{rot}[\operatorname{grad} f] \equiv \nabla \times \nabla f = o$,

ya que los vectores simbólicos ∇ y ∇f no se distinguen sino por el factor escalar. Este hecho lo hemos demostrado en el § 3.4, teorema 2.

2) $\operatorname{div} \operatorname{rot} a \equiv (\nabla, \nabla \times a) = 0$,

puesto que el vector ∇ es ortogonal al vector $\nabla \times a$.

3) $\operatorname{div}(fa) \equiv (\nabla, fa) = (\nabla f, a) + f(\nabla, a)$.

En efecto,

$$(\nabla, fa) = \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR) =$$

$$= f'_x P + f'_y Q + f'_z R + f(P'_x + Q'_y + R'_z) = (\nabla f, a) + f(\nabla, a).$$

4) Es fácil comprobar que $\operatorname{grad} fg = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$ o bien en la forma simbólica $\nabla fg = f\nabla g + g\nabla f$. Así, pues, el operador ∇ actúa sobre el producto de dos funciones como operador de derivación habitual.

5) $\operatorname{rot}(fa) = f \operatorname{rot} a + \operatorname{grad} f \times a$ o bien $\nabla \times fa = f(\nabla \times a) + \nabla f \times a$.

6) $\operatorname{div}(a \times b) = (b, \operatorname{rot} a) - (a, \operatorname{rot} b)$

o bien

$$(\nabla, a \times b) = (b, \nabla \times a) - (a, \nabla \times b).$$

7) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \Delta f$,

donde Δ se llama *operador de Laplace*. Es evidente que

$$(\nabla, \nabla f) = \Delta f.$$

Capítulo 4

Series de Fourier. Integral de Fourier

§ 4.1. Series trigonométricas

La función $f(x)$ se llama *periódica (de período a)* si está definida sobre todo el eje real y para ella se cumple la igualdad

$$f(x + a) = f(x)$$

para todos los valores de x.

Por ejemplo, las funciones trigonométricas

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \cos 3x, \ldots \tag{1}$$

tienen el período de 2π.

En realidad las funciones $\cos kx$ y $\operatorname{sen} kx$ para cada número natural k tienen el período $2\pi/k$. De este modo $2\pi/k < 2\pi$ cuando $k > 1$. En este caso la constante $y = 1$ tiene un período tan pequeño como se quiera. No obstante, todas las funciones de la sucesión (1) tienen el período igual a 2π.

La función periódica

$$s = f(t)$$

representa un movimiento periódico (oscilación del punto que tiene en el instante de tiempo t la coordenada s (sobre el eje s).

La función (de período $2l$)

$$s = A \cos\left(\frac{k\pi}{l} t + \omega\right), \tag{2}$$

donde $A > 0$, $l > 0$ y ω son constantes y k es un número natural, define la *oscilación armónica del punto que posee la amplitud A, la fase ω y la frecuencia k.*

La función (2) tiene el período $2l/k$, o sea, una oscilación completa se efectúa por un intervalo de tiempo igual a $2l/k$. En este caso la cantidad de oscilaciones por unidad de tiempo vale $k/2l$. El número $k/2l$ es el que debería denominarse frecuencia de oscilación, pero de ordinario se llama *frecuencia* (de oscilación) al número k.

Notemos que la función

$$a_k \cos\frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l} t \quad (\sqrt{a_k^2 + b_k^2} > 0),$$

donde k es un número natural, determina la oscilación armónica, porque

$$a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos \frac{k\pi}{l} t + \right.$$

$$\left. + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right) = A_k \cos \left(\frac{k\pi}{l} t + \omega_k \right),$$

donde

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

y ω_k se define unívocamente por las relaciones

$$0 \leqslant \omega_k < 2\pi, \quad a_k / \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \cos \omega_k,$$

$$b_k / \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \operatorname{sen} \omega_k.$$

Como ejemplo de oscilación armónica puede servir la de un péndulo de muelle (fig. 105). Supongamos que el muelle suspendido del punto B tiene en su extremo inferior una carga de masa m y en el instante $t = 0$ la coordenada del centro de gravedad de esta carga es igual a $z = 0$. A la carga se le aplica en el instante $t = 0$ un impulso $z' = \mu$ en el sentido del eje z. Como resultado la carga oscilará. Designemos por $z = z(t)$ su desviación del punto de equilibrio. Por cuanto la fuerza que actúa sobre la carga en la primera aproximación es igual, según la ley de Newton, a $mz'' = -kz$, entonces

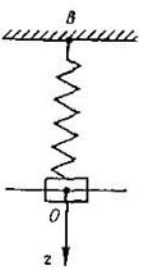

Fig. 105.

$$z'' + \nu^2 z = 0 \quad \left(\nu^2 = \frac{k}{m} \right).$$

La solución general de esta ecuación diferencial tiene la forma

$$z = C_1 \cos \nu t + C_2 \operatorname{sen} \nu t,$$

donde C_1 y C_2 son las constantes arbitrarias. Puesto que

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = \mu,$$

podemos decir que

$$z = \frac{\mu}{\nu} \operatorname{sen} \nu t = A \cos \left(\nu t - \frac{\pi}{2} \right), \quad A = \frac{\mu}{\nu}$$

y entonces hemos obtenido que el centro de gravedad de la carga oscila armónicamente.

Los movimientos (oscilaciones) periódicos se estudian en las más diferentes esferas del conocimiento: en la teoría de elasticidad,

la acústica, la radiotecnia, la electrotecnia y por doquier las oscilaciones armónicas son movimientos periódicos elementales.

La suma final de oscilaciones armónicas con el período dado $2l$ es una oscilación compleja

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right). \qquad (3)$$

El término nulo de esta suma lo hemos escrito en la forma $a_0/2$. Luego veremos que esto es más cómodo.

Por último, una oscilación (movimiento) periódica más compleja puede obtenerse como la suma de la serie convergente (para todos los valores de t)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right) \qquad (4)$$

llamada *serie trigonométrica*.

Los números a_k y b_k se denominan *coeficientes de la serie trigonométrica* (4) y sus sumandos

$$a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t$$

llevan el nombre de *términos de la serie* (4) o de *armónicos* de ésta (correspondientes a la frecuencia k).

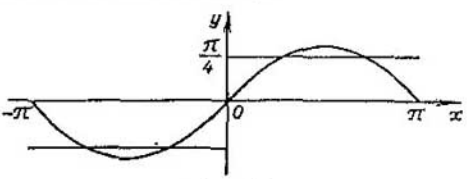

Fig. 106.

EJEMPLO 1. Las figs. 106 a 109 muestran los gráficos de las primeras cuatro sumas parciales de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{7} + \ldots$$

y el gráfico de la función

$$\psi(x) = \begin{cases} \pi/4, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0,\ x = \pi, \\ -\pi/4, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

La fig. 106 (junto con el gráfico de $\psi(x)$) presenta la función $S_1(x) = \operatorname{sen} x$. En la fig. 107 con línea de trazos están dibujados los gráficos de $S_1(x)$ y $\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}$ y con línea continua, los de la función

$$S_2(x) = S_1(x) + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}.$$

En la fig. 108 con línea de trazos están representados los gráficos

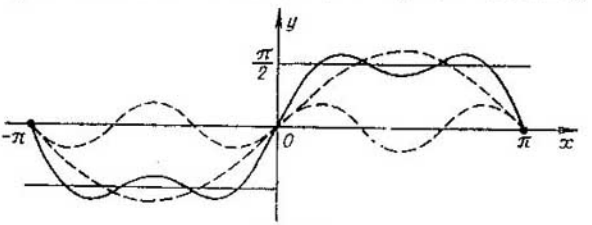

Fig. 107.

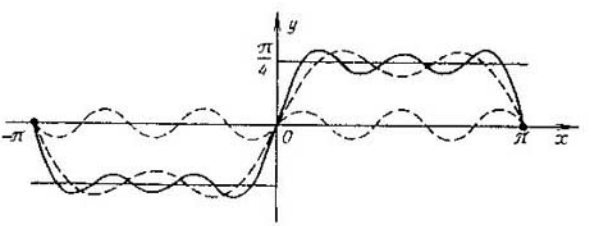

Fig. 108.

de $S_2(x)$ y $\frac{\operatorname{sen} 5x}{5}$ y con línea continua, los de la función

$$S_3(x) = S_2(x) + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5},$$

etc. Ya de la fig. 109 se ve que es necesario suponer

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \psi(x) \quad (-\pi < x \leqslant \pi). \tag{5}$$

Es así en la realidad. Lo que a esto atañe véase a continuación el § 4.4. Las funciones $S_n(x)$ tienen para todo n el período 2π:

$$S_n(x + 2\pi) = S_n(x).$$

Prolonguemos la función $\psi(x)$ sobre todo el eje real, periódicamente con el período 2π. En este caso ella tendrá un gráfico análogo al de la fig. 110. Por cuanto la igualdad (5) se cumple para todos los

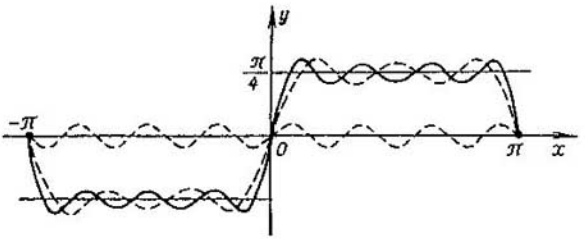

Fig. 109.

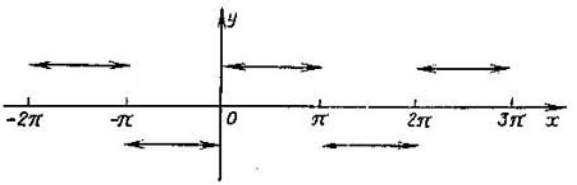

Fig. 110.

valores de $x \in (-\pi, \pi]$ y las funciones $S_n(x)$ y $\psi(x)$ son de período 2π, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

EJEMPLO 2. La fig. 111 muestra tres funciones periódicas cuyo período es 2π

$$S_2(x) = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \text{ (con línea continua),}$$

$$S_3(x) = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} \text{ (con línea de trazos).}$$

$$S_4(x) = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} \text{ (con línea de puntos).}$$

Para los valores de n mayores, el gráfico de la suma $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$ puede verse esquemáticamente dibujado (no muy exacto) en la fig. 112 lo que sugiere que la función límite

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

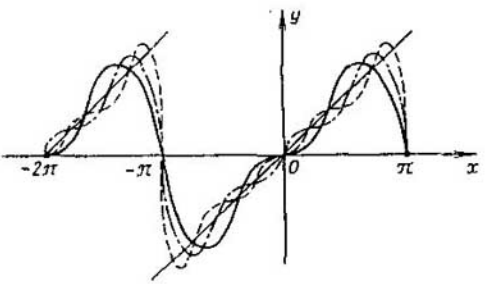

Fig. 111.

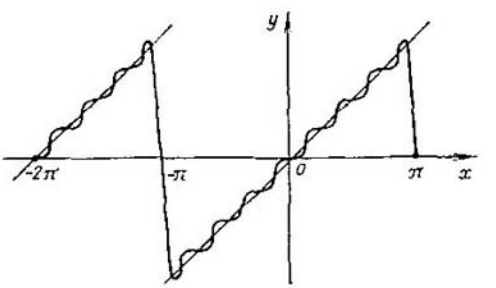

Fig. 112.

es una función periódica (de período 2π) que se define por las igualdades

$$S(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0 & x = \pi. \end{cases}$$

De hecho es así (véase el § 4.4).

§ 4.2. Convergencia de series trigonométricas

Supongamos que está dada la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right). \tag{1}$$

Para aclarar si converge o no esta serie es natural examinar la serie numérica

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) \tag{2}$$

que mayorea, como se dice, la *serie* (1). Sus términos superan, respectivamente, los valores absolutos de los términos de la serie (1):

$$\left|a_k\cos\frac{k\pi}{l}x\right|\leqslant|a_k|,\quad\left|b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right|\leqslant|b_k|.$$

De aquí se deduce que si la serie (2) converge, converge asimismo la serie (1) para todos los valores de x y además absoluta e uniformemente (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 9.8, teorema 1). Sin embargo, la serie (1) puede converger sin que converja la serie (2). Es que sus términos para cada valor de x, al variar k, cambian de signo (oscilan) un número infinito de veces y ella puede resultar convergente debido a la compensación de sus términos positivos por los negativos. En la teoría general de las series existen criterios de convergencia de las series semejantes. Tales criterios son el de Dirichlet y el de Abel [1]) (véase el § 9.9, teoremas 3 y 4 del mismo libro), cómodos para la investigación de las series trigonométricas.

De un modo u otro, si se establece que la serie (1) converge, entonces del hecho de que sus términos sean funciones continuas de período $2l$ se deduce que también su suma

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right) \tag{3}$$

es una función continua de período $2l$ (véanse el § 9.8, teorema 2 y el § 9.9, teorema 2 del mismo libro) y la serie (3) puede ser integrada término a término.

[1]) N. H. Abel (1802—1829), matemático noruego. P. G. L. Dirichlet (1805—1859), matemático alemán.

La serie (3) se puede derivar formalmente respecto a x:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l}\left(-a_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x + b_k \cos\frac{k\pi}{l}x\right) \tag{4}$$

y formar su serie mayorante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l}(|a_k| + |b_k|). \tag{5}$$

Nuevamente, si la serie (5) converge, la serie (4) tambien converge y con ello uniformemente. Al mismo tiempo, en virtud del teorema noto de la teoría de las series uniformemente convergentes la suma de la serie (4) es derivada de la suma de la serie (3), o sea,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l}\left(-a_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}\cdot x + b_k \cos\frac{k\pi}{l}x\right).$$

En general, si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^s (|a_k| + |b_k|) < \infty$$

para cierto s natural converge, es legítimo derivar la serie (3) término a termino s veces.

Asimismo es necesario recordar que no se excluye legitimidad de derivar la serie (3) una vez más (es decir, $s+1$ veces).

EJEMPLO 1. Determinar el número de veces que puede ser derivada término a término la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kx \quad (0 < q < 1).$$

Derivemos formalmente la serie dada s veces:

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} k^s q^k \begin{Bmatrix} \cos kx \\ \operatorname{sen} kx \end{Bmatrix}.$$

La serie mayorante $\sum_{k=1}^{\infty} k^s q^k$ $(0 < q < 1)$ converge para todo número natural s hecho que puede ser determinado con ayuda del criterio de D'Alembert. Por eso la serie inicial se puede derivar término a término tantas veces como se quiera.

PROBLEMA 1. ¿Cuántas veces se pueden derivar, a ciencia cierta, término a término las series

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k^4}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}$,

c) $\sum_{k=1}^{\infty} q^k (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \quad (0 < q < 1, |a_k|, |b_k| < M)$.

¿Cuántas derivadas continuas tienen a ciencia cierta las sumas de estas series? (véase también el ejemplo 1 del § 9.9 del libro anteriormente mencionado).

§ 4.3. Serie de Fourier

Supongamos que está dada la función $f(t)$, cuyo período es $2l$. Es noto que ésta se puede ser desarrollada en serie trigonométrica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right), \tag{1}$$

es decir, ella ya es la suma de cierta serie trigonométrica (de la forma (1)) para todos los números t (o, quizás, para todos los números t a excepción de algunos valores de t). La pregunta es: ¿cómo determinar a partir de la función $f(t)$ los coeficientes a_k y b_k? Esta cuestión fue resuelta, en principio, por los matemáticos y físicos de comienzos del siglo pasado. Hizo gran aportación a su resolución J. Fourier [1]). Mostró que los coeficientes a_k y b_k de la serie trigonométrica que representa la función periódica $f(t)$, de período $2l$, pueden ser calculados por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi}{l} t f(t)\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t f(t)\, dt \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Los números a_k y b_k que se calculan por estas fórmulas se llaman *coeficientes de Fourier* de la función $f(t)$ y la serie trigonométrica (1) la cual en vez de a_k y b_k contiene los coeficientes respectivos de Fourier lleva el nombre de *serie de Fourier* de la función $f(t)$.

[1]) J. B. Fourier (1768—1830), matemático francés.

Cabe señalar que en algunos casos (para clases más estrechas de funciones) las fórmulas (2) eran conocidas aún por Euler. Por eso las denominan también fórmulas de Euler — Fourier.

En el § 4.6 será hecha la deducción de las fórmulas (2) en suposición de que ya es sabido que la función periódica $f(t)$ de período $2l$ se desarrolla en serie trigonométrica que converge uniformemente hacia ella.

Conviene decir que desde hace mucho los físicos creían que todo movimiento periódico compuesto de un punto (oscilación compleja) — la oscilación mecánica de un punto de una cuerda sonora o la oscilación electromagnética, o bien la oscilación relacionada con la propagación del sonido— se descompone en oscilaciones armónicas, es decir, el movimiento periódico compuesto hay que imaginarlo como la suma (finita o infinita) de las oscilaciones armónicas simples del mismo período. La separación de una oscilación armónica, correspondiente a la frecuencia dada k, que forma parte de un movimiento periódico compuesto tiene gran importancia práctica. Los físicos obtienen tal separación de la oscilación armónica a partir de un movimiento real con ayuda de aparatos especiales llamados resonadores. El matemático, si tiene dado el movimiento en cuestión con ayuda de la función periódica $s = f(t)$, obtiene esta separación por medio de cálculos. Calcula simplemente los coeficientes de Fourier a_k y b_k de esta función y entonces el k-ésimo armónico respectivo tendrá la forma

$$a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t.$$

Notemos que si el período de la función $f(t)$ es a y ésta es integrable sobre el segmento $[0, a]$ o, como se dice, es integrable sobre el período, para ella será válida la igualdad

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_\lambda^{a+\lambda} f(x)\,dx, \tag{3}$$

cualquiera que sea el número real λ (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 6.4. ejemplo 8).

La propiedad (3) muestra, en particular, que los coeficientes de Fourier de una función periódica $f(t)$ de período $2l$ se pueden escribir en la forma

$$a_k = \frac{1}{l} \int_\lambda^{\lambda+2l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} t\,dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_\lambda^{\lambda+2l} f(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

donde λ es un número real arbitrario, porque las funciones $\cos \frac{k\pi}{l} t$ y $\operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t$ son de período $2l$ y el producto de las funciones de período $2l$ son, a su vez, funciones de período $2l$.

Notemos, además, que si la función f es par sobre el segmento $[-a, a]$, entonces (véase el § 6.4, ejemplo 6, del libro arriba mencionado)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Si la función f es impar sobre el segmento $[-a, a]$, entonces (véase el ejemplo 7 del § 6.4 del libro arriba mencionado)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

La función $\cos \frac{k\pi}{l} t$ es par y la función $\operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t$ es impar. Además el producto de dos funciones pares y dos impares es una función par y el producto de una función par por una impar es una función impar. Por eso para la función par $f(t)$ de período $2l$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l} x\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

y para la función impar:

$$a_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l} x\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

EJEMPLO 1. Desarrollar en serie de Fourier la función (de período 2π) $f(x) = x^2$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$.

La función dada es par. Entonces su serie de Fourier se compone solamente de cosenos ($b_k = 0$). Calculemos los coeficientes a_k:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

y

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\,x^2\,\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} kx\,dx =$$

$$= \frac{4x}{\pi k}\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi k^2}\int_0^{\pi} \cos kx\,dx =$$

$$= (-1)^k \frac{4}{k^2} \quad (k > 0).$$

Ahora bien,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

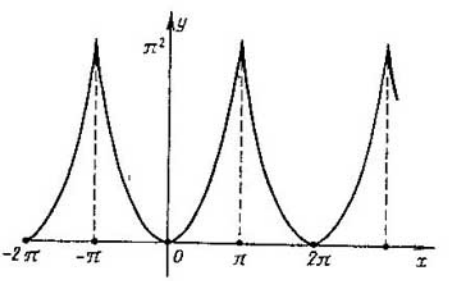

Fig. 113.

El gráfico de la suma de esta serie se puede ver en la fig. 113.

§ 4.4. Criterios de convergencia de las series de Fourier

Para simplificar las notaciones vamos a considerar las funciones de período 2π. Para las funciones de período $2l$, donde l es un número natural positivo, los razonamientos son análogos.

Como sabemos, se llama serie de Fourier de la función $f(x)$ de período 2π a la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \qquad (1)$$

cuyos coeficientes se calculan por las fórmulas

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

De aquí vemos que para que la serie de Fourier de la función f de período 2π tenga significado, en todo caso deben tener significado las integrales (2).

En nuestros razonamientos las integrales (2) siempre tendrán significado, porque hablaremos de funciones acotadas continuas o continuas a trozos sobre un período.

Hagamos la siguiente pregunta: ¿qué condiciones debe satisfacer la función $f(x)$ para que su serie de Fourier converja hacia ella?

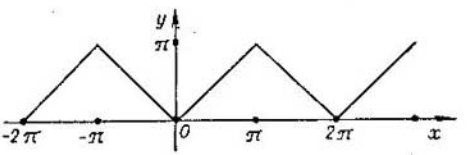

Fig. 114.

Los matemáticos se ocuparon mucho de este problema. Nos limitaremos a formular algunos criterios suficientes de convergencia de las series de Fourier, importantes desde el punto de vista práctico, sin demostrarlos.

Si una función $f(x)$ de período 2π es continua sobre todo el eje real y tiene la derivada continua a trozos sobre el período, entonces su serie de Fourier converge uniformemente hacia ella:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

EJEMPLO 1. La función $\psi(x)$ de período 2π, que es par y se define sobre el segmento $[0, \pi]$ por la igualdad

$$\psi(x) = x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi),$$

satisface, evidentemente, el criterio enunciado (véase el gráfico de esta función en la fig. 114). Sus coeficientes de Fourier $b_k = 0$

y los coeficientes

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,x\,\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx = \frac{2}{\pi k^2}\cos kx\,\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1), \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ahora bien,

$$a_0 = \pi, \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Pero entonces, conforme al criterio indicado,

$$\psi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad (-\infty < x < \infty);$$

con la particularidad de que la convergencia de la serie es uniforme.

El hecho de que esta serie converje uniformemente se deduce asimismo de la teoría general de las series (según el criterio de Weierstrass [1]). Pero no es trivial que converja precisamente a la función $\psi(x)$.

Notemos, además, que la función periódica dada $\psi(x)$ coincide con la función $y = x$ solamente sobre el segmento $[0, \pi]$ y fuera del segmento $[0, \pi]$ estas funciones son diferentes.

Enunciemos otro criterio de convergencia de la serie de Fourier llamado *criterio de Dirichlet*.

Se dice que una *función* $f(x)$ *de período* 2π *satisface la condición de Dirichlet si sobre el segmento* $[0, 2\pi]$ *se puede señalar un número finito de puntos* $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = 2\pi$ *tales que sobre los intervalos* (x_j, x_{j+1}) *la función esté acotada y sea monótona (no decrece o no crece) y en cada punto* x_j *de discontinuidad de* f

$$f(x_j) = \frac{1}{2}(f(x_j + 0) + f(x_j - 0)),$$

o sea, el valor de f *en* x_j *sea la media aritmética de los límites derecho e izquierdo de* f *en* x_j.

[1]) K. Th. W. Weierstrass (1815—1897), célebre matemático alemán.

Si la función $f(x)$ de período 2π satisface la condición de Dirichlet, su serie de Fourier convergirá hacia ella para todo valor de x:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx)\quad(-\infty<x<\infty).$$

EJEMPLO 2. La función $\varphi(x)$ de período 2π, que se define por la igualdad

$$\varphi(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0<x<2\pi,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

como se ve de su gráfico (fig. 115), satisface la condición de Dirichlet. Es que los puntos $0=x_0<x_1=2\pi$ poseen la siguiente propiedad:

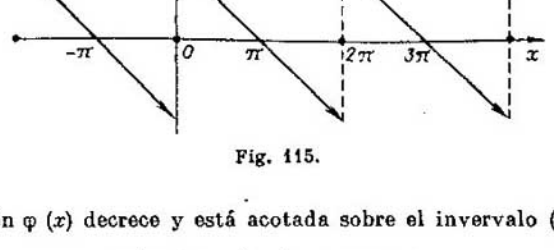

Fig. 115.

la función $\varphi(x)$ decrece y está acotada sobre el invervalo (x_0, x_1) y

$$\varphi(0)=\frac{\varphi(0+0)+\varphi(0-0)}{2}=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0,$$
$$\varphi(2\pi)=\frac{\varphi(2\pi+0)+\varphi(2\pi-0)}{2}=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0.$$

La función $\varphi(x)$ es impar, por eso su serie de Fourier se compone solamente de senos; por consiguiente, los coeficientes de Fourier para ella

$$a_k=0\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\operatorname{sen} kx\,dx=-\frac{2}{\pi}(\pi-x)\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,dx=\frac{2}{k}-\frac{2}{\pi k}\,\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{k}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Así, pues,

$$\varphi(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \quad (-\infty < x < \infty).$$

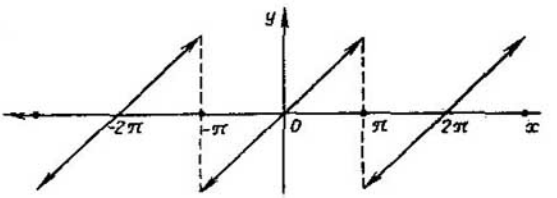

Fig. 116.

PROBLEMA 1. Desarrollar en serie de Fourier la función de período 2π definida sobre $[-\pi, \pi]$ por la igualdad (fig. 116)

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

RESPUESTA. $f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$.

§ 4.5. Propiedades ortogonales de las funciones trigonométricas

Examinemos la sucesión de funciones trigonométricas

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots. \tag{1}$$

Para ellas son válidas las fórmulas importantes (fáciles de comprobar):

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \pi, & k = l, \end{cases} \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} lx\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \pi, & k = l, \end{cases} \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \operatorname{sen} lx\, dx = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3, \ldots), \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots), \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots), \\
&\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

De (2), en particular, resulta que la integral, sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, del producto de cualesquiera dos funciones de la sucesión (1) es igual a cero.

Esta propiedad se enuncia así: *las funciones de la sucesión* (1) *son ortogonales sobre el segmento* $[-\pi, \pi]$.

Además, de las fórmulas (2) resulta:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi, \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 kx\, dx = \pi, \qquad k = 1, 2, \ldots \\
&\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = 2\pi.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

PROBLEMA 1. Obtener unas fórmulas que sean análogas a las (2) y (3) para las funciones trigonométricas

$$1, \cos \frac{\pi}{l} x, \ \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x, \ \cos \frac{2\pi}{l} x, \ \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} x, \ldots.$$

Indicación. Estas fórmulas se pueden obtener directamente por medio del cálculo. Pero pueden obtenerse también, sustituyendo en las integrales de las (2) y (3) la variable $x = \frac{\pi u}{l}$.

§ 4.6. Coeficientes de Fourier

Supongamos que la función $f(x)$ de período 2π queda desarrollada en serie trigonométrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \qquad (1)$$

y resulta que esta serie converge uniformemente hacia ella.

Cada término de la serie (1) es una función continua y puesto que la serie (1), según la condición, converge uniformemente, su suma $f(x)$ es la función continua (sobre un eje real) (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 9.8, teorema 2).

Multipliquemos el primero y segundo miembros de (1) por $\cos mx$, donde m es el número natural. Por cuanto la función $\cos mx$ es continua y está acotada, la serie obtenida volverá a estar compuesta de funciones continuas y volverá a converger uniformemente, esta vez ya hacia la función continua $f(x) \cos mx$. Pero es legítimo integrar las series uniformemente convergentes de las funciones continuas término a término sobre el segmento finito. Vamos a integrar la serie obtenida término a término sobre el período, o sea, sobre el segmento $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx\, dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \cos mx\, dx \right) =$$

$$= a_m \cdot \pi \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

La segunda igualdad se deduce de las fórmulas (2) del § 4.5 (propiedad de ortogonalidad de las funciones trigonométricas).

Análogamente obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx = b_m \pi \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, 1\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx + \right.$$

$$\left. + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, dx \right) = \frac{a_0}{2} 2\pi = a_0 \pi$$

en virtud de las últimas tres fórmulas (2) del § 4.5.

Como ya hemos señalado en el § 4.5, (2), los números a_m y b_m que se calculan por las fórmulas (2) se llaman *coeficientes de Fourier de la función f* y la misma serie trigonométrica (1), donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de la función f, se denomina *serie de Fourier* de la función f.

Pues, hemos demostrado que *si la función f puede ser representada en forma de suma de la serie trigonométrica* (1) *que converge uniformemente* (¡*para todos los valores de x*!), *los números* a_k *y* b_k *serán necesariamente los coeficientes de Fourier de la función f.*

Observación 1. De este modo, *toda serie trigonométrica que converge uniformemente es la serie de Fourier de su propia suma.*

Observación 2. Hemos examinado aquí la función $f(x)$ de período 2π para no complicar la notación. En cuanto al período $2l$, los razonamientos son análogos.

§ 4.7. Estimación de los coeficientes de Fourier

TEOREMA 1. *Supongamos que la función f (x) de período* 2π *tiene la derivada continua* $f^{(s)}(x)$ *de orden s que satisface sobre todo el eje real la inecuación*

$$|f^{(s)}(x)| \leqslant M_s; \tag{1}$$

entonces los coeficientes de Fourier de la función f satisfacen la desigualdad

$$|a_k| \leqslant \frac{2M_s}{k^s}, \quad |b_k| \leqslant \frac{2M_s}{k^s} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Integrando por partes y teniendo en cuenta que $f(-\pi) = f(\pi)$, tenemos

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f(t)\frac{\operatorname{sen} kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{\operatorname{sen} kt}{k}dt\right] = -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\operatorname{sen} kt\,dt. \tag{3}$$

Por eso

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} M_1 \cdot 1\,dx = \frac{2M_1}{k}.$$

Al integrar sucesivamente por partes el segundo miembro de (3), teniendo en cuenta que las derivadas $f', \ldots, f^{(k-1)}$ son continuas y toman valores iguales en los puntos $t = -\pi$ y $t = \pi$, así como la estimación (1), obtenemos la primera estimación en (2).

La segunda estimación en (2) se obtiene de un modo semejante.

§ 4.8. Espacio de las funciones con el producto escalar

La función $f(x)$ se llama *continua a trozos sobre el segmento* $[a, b]$ si es continua sobre este segmento, a excepción, quizás, de un número finito de puntos donde ella tiene discontinuidades de primer género (véase también el § 7.4 de nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral»). Tales funciones se pueden sumar y multiplicar por números reales y volver a obtener como resultado funciones continuas a trozos sobre $[a, b]$.

Llamaremos *producto escalar* de dos funciones f y φ continuas a trozos sobre $[a, b]$ $(a < b)$ a la integral

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Es evidente que para cualesquiera funciones f, φ, ψ continuas a trozos sobre $[a, b]$ se cumplen las propiedades:

1) $(f, \varphi) = (\varphi, f)$.

2) $(f, f) \geqslant 0$ y de la igualdad $(f, f) = 0$ se deduce que $f(x) = 0$ sobre $[a, b]$, salvo, quizás, un número finito de puntos x.

3) $(\alpha f + \beta\varphi, \psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(\varphi, \psi)$,

donde α y β son los números reales arbitrarios.

Sea $L_2' = L_2'(a, b)$ el conjunto de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $[a, b]$, para las cuales se ha introducido el producto escalar mediante la fórmula (1) y lo llamaremos *espacio* L_2' o bien $L_2'(a, b)$.

Observación 1. En las matemáticas se llama espacio $L_2 = L_2(a, b)$ el conjunto de funciones $f(x)$ integrables en el sentido de Lebesgue sobre $[a, b]$ junto con sus cuadrados para los cuales se ha introducido el producto escalar por la fórmula (1). El espacio L_2' que se examina es una parte de L_2. El espacio L_2' posee muchas propiedades del espacio L_2, pero no todas (véase a continuación § 4.9, nota).

De las propiedades 1), 2) y 3) se deduce la importante *desigualdad de Buniakovski* [1]) (véase nuestro libro «Matemáticas superiores.

[1]) V. Ya. Buniakovski (1804—1889), matemático ruso.

Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 6 (6))

$$|(f, \varphi)| \leqslant (f, f)^{1/2} (\varphi, \varphi)^{1/2}$$

la cual en el lenguaje de las integrales aparece así:

$$\left| \int_a^b f(x) \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\, dx}\,.$$

La magnitud

$$\| f \| = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2} = (f, f)^{1/2}$$

se denomina *norma* de la función f.

La norma posee las propiedades siguientes:

1) $$\| f \| \geqslant 0,$$

con la particularidad de que la igualdad puede existir solamente para la función nula $f = 0$, o sea, para la función igual a cero, a excepción, quizás, de un número finito de puntos (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 6.2, teorema 5),

2) $$\| f + \varphi \| \leqslant \| f \| + \| \varphi \|,$$

3) $$\| \alpha f \| = |\alpha| \cdot \| f \|,$$

donde α es el número real.

La segunda propiedad en el lenguaje de las integrales tiene la forma siguiente:

$$\left(\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b \varphi^2(x)\, dx \right)^{1/2}$$

y se llama *desigualdad de Minkowski*.

Se dice que la *sucesión de las funciones* $\{f_n\}$ pertenecientes a L_2' *converge a la función* $f \in L_2'$ *en media cuadrática sobre* $[a, b]$ (o de otro modo *según la norma* L_2') *si*

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \| = \lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} = 0.$$

Notemos que si la sucesión de las funciones $f_n(x)$ converge uniformemente hacia la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, entonces para n suficientemente grandes la diferencia $f(x) - f_n(x)$ debe ser pequeña, en su valor absoluto, para todos los valores de $x \in [a, b]$.

Sin embargo, si $f_n(x)$ tiende hacia $f(x)$ en media cuadrática sobre el segmento $[a, b]$, entonces la diferencia indicada puede no ser también asimismo pequeña para grandes n *por doquier* sobre $[a, b]$. En algunos lugares del segmento $[a, b]$ esta diferencia puede ser incluso grande y es importante solamente que la integral tomada de su cuadrado sobre el segmento $[a, b]$ sea pequeña para grandes n.

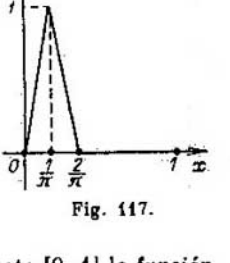

Fig. 117.

EJEMPLO 1. Supongamos dada sobre el segmento $[0, 1]$ la función continua lineal a trozos $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ representada en la fig. 117, además,

$$f_n(0) = f_n(2/n) = f_n(1) = 0,$$
$$f_n(1/n) = 1.$$

Para cualquier n natural

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} f_n(x) = 1,$$

y, por consiguiente, esta sucesión de las funciones no es uniformemente convergente hacia cero cuando $n \to \infty$.

Mientras tanto

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \left(\int_0^1 f_n^2(x)\, dx \right)^{1/2} =$$
$$= \left(\int_0^{1/n} (nx)^2\, dx + \int_{1/n}^{2/n} (2 - nx)^2\, dx \right)^{1/2} =$$
$$= \left(2 \int_0^{1/n} (nx)^2\, dx \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3n} \right)^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

o sea, la sucesión de las funciones $\{f_n(x)\}$ tiende a cero en media cuadrática sobre $[0, 1]$.

A partir de los elementos de la sucesión $f_1, f_2, f_3, \ldots$ se puede construir la serie

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots. \qquad (2)$$

La suma de sus primeros n términos

$$\sigma_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

es una función perteneciente a L_2'. Si en L_2' existe una función f tal que

$$\| f - \sigma_n \| \to 0, \quad n \to \infty,$$

entonces se dice que la serie (2) converge hacia la función f en media cuadrática y se escribe

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots .$$

Observación 2. Se puede examinar el espacio $L_2' = L_2'(a, b)$ de las funciones de valores complejos $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, donde f_1 y f_2 son las funciones reales continuas a trozos sobre $[a, b]$. En este espacio las funciones se multiplican por los números complejos y el producto escalar de las funciones $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ y $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ se determina del modo siguiente:

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)]\,[\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)]\,dx$$

y la norma f se determina como

$$\| f \| = (f, f)^{1/2} = \left(\int_a^b f \cdot \bar{f}\,dx \right)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_a^b [f_1^2(x) + f_2^2(x)]\,dx \right)^{1/2}$$

§ 4.9. Sistema ortogonal de funciones

La función $\varphi \in L_2' = L_2'(a, b)$ se llama *normal* si

$$\| \varphi \| = (\varphi, \varphi)^{1/2} = 1.$$

Dos funciones $\varphi, \psi \in L_2'$ se denominan *ortogonales* (entre sí) si $(\varphi, \psi) = 0$.

Un sistema (finito o infinito) de las funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$.

$$\varphi_{11}\ \varphi_{21}\ \varphi_{31} \ldots \qquad (1)$$

se dice *ortogonal* si las funciones tienen una norma positiva y son dos a dos ortogonales.

El sistema (1) se llama *ortogonal* y *normal* (*ortonormal*) u *ortonormalizado* si

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases}$$

o sea, es ortogonal y la norma de cada función que forma parte de este sistema es unitaria.

Todo sistema ortogonal finito de funciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ es *linealmente independiente en* L_2', o sea, del hecho de que

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(x) = 0, \quad x \in [a, b],$$

donde α_k son los números, se deduce que todos los números $\alpha_k = 0$. En efecto, si multiplicamos escalarmente ambos miembros de esta igualdad por φ_l ($l = 1, \ldots, N$), entonces en virtud de las propiedades lineales del producto escalar obtenemos

$$\Big(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k, \varphi_l\Big) = \alpha_l (\varphi_l, \varphi_l) = 0$$

y puesto que $(\varphi_l, \varphi_l) > 0$, entonces $\alpha_l = 0$ ($l = 1, \ldots, N$).

Si $f \in L_2' = L_2'(a, b)$ es una función arbitraria, el número

$$\frac{1}{\| \varphi_k \|^2} (f, \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

lleva el nombre de *coeficiente de Fourier de la función f* respecto a la función φ_k del sistema ortogonal (1). La serie

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\| \varphi_k \|^2} (f, \varphi_k) \varphi_k \tag{2}$$

engendrada por la función $f \in L_2'$ se llama *serie de Fourier de la función f en el sistema ortogonal* (1).

Si el sistema (1) es ortonormal, entonces $\| \varphi_k \| = 1$ ($k = 1, 2, \ldots$) y la serie de Fourier de la función f se escribirá de una manera más sencilla

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k \tag{3}$$

En este caso los números (f, φ_k) son los coeficientes de Fourier. A continuación examinaremos solamente los sistemas ortonormalizados (1). El paso de estos sistemas a los ortogonales arbitrarios tiene un carácter técnico.

TEOREMA 1. *Si el sistema* (1) *es ortonormalizado, entonces para toda función* $f \in L_2'$ *la norma*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\|$$

entre todos los posibles sistemas de números $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ *alcanza su mínimo para el único sistema de números definidos por las igualdades*

$$\alpha_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, \ldots, N),$$

es decir, para los coeficientes de Fourier de la función f.

Ahora bien,

$$\min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|, \tag{4}$$

entonces

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)^2. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k,\ f - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j\right) =$$

$$= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} [(f, \varphi_k)^2 - 2\alpha_k (f, \varphi_k) + \alpha_k^2] + (f, f) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} [(f, \varphi_k) - \alpha_k]^2 + (f, f) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)^2 \geqslant$$

$$\geqslant (f, f) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)^2.$$

En este caso es evidente que la última relación en esta cadena se convierte en igualdad únicamente en el caso cuando $\alpha_k = (f, \varphi_k)$ para todo valor de k. De este modo quedan demostradas las relaciones (4) y (5).

De la igualdad (5), si se tiene en cuenta que su primer miembro es un número no negativo, se deduce la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)^2 \leqslant (f, f)$$

que es justa para todo N. Pero entonces, si el sistema (1) se compone de un número infinito de funciones φ_k, la serie formada por los cuadrados de los coeficientes de Fourier de la función f converge y es válida la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 \leqslant (f, f) \tag{6}$$

llamada *desigualdad de Bessel*.

Es muy importante el caso cuando el sistema ortonormalizado (1) es tal que la desigualdad (6) se convierta en igualdad (*igualdad de Parseval — Steklov* [1])

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 = (f, f) \tag{7}$$

para todas las funciones $f \in L_2'$.

Para determinar el valor de la igualdad de Parseval, asignemos la función arbitraria $f \in L_2'$ y formemos para ella la serie de Fourier

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\, \varphi_k .$$

La suma de los primeros n términos de esta serie

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\, \varphi_k (x)$$

se llama *n-ésima suma de Fourier de la función f en el sistema ortogonal* (1).

Con arreglo a la fórmula (5) la desviación de $S_n(x)$ respecto a $f(x)$ en media cuadrática (en el sentido de L_2') es igual a

$$\| f - S_n \|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2. \tag{8}$$

Si para la función $f \in Z_2'$ se cumple la igualdad de Parseval (7), entonces

$$\| f - S_n \| \to 0, \quad n \to \infty \tag{9}$$

e inversamente, de (9) se deduce la validez de la igualdad de Parseval (7).

Existe la terminología siguiente. El *sistema ortogonal* (1) se denomina *completo en* L_2' si la serie de Fourier de toda función $f \in L_2'$ converge en media cuadrática hacia f, o sea, tiene lugar la propiedad (9) para todas las funciones $f \in L_2'$.

[1]) M. A. Parseval (1755—1836), matemático francés. V. A. Steklov (1864—1926), matemático y físico ruso.

Ahora bien, hemos demostrado que *para que el sistema ortonormalizado* (1) *sea completo en* L_2' *es necesario y suficiente que para toda función* $f \in L_2'$ *se cumpla la igualdad de Parseval* (7).

Nota. Ya hemos señalado en la observación 1 del § 4.8 que $L_2 = L_2(a, b)$ designa el espacio de las funciones $f(x)$ integrables en el sentido de Lebesgue sobre $[a, b]$ junto con sus cuadrados y que $L_2' \subset L_2$.

Examinemos un sistema de funciones continuas ortonormalizado sobre el segmento $[a, b]$

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \varphi_3(x), \ \ldots$$

que sea completo en el sentido en que lo hemos definido anteriormente. Sabemos que si $f \in L_2'$, entonces para los números

$$c_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, 2 \ldots) \tag{10}$$

se cumple la igualdad de Parseval

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Esto es justo asimismo para las funciones $f \in L_2$, sólo que es necesario entender las integrales en el sentido de Lebesgue.

No obstante, tiene lugar también la afirmación inversa: si los números c_k $(k = 1, 2, \ldots)$ son tales que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

converge, entonces en L_2 existe una función $f(x)$ tal que se cumplan las igualdades (7).

Sin embargo, en L_2' tal función puede no existir. En esto se manifiesta la imperfección del espacio L_2'. En el espacio L_2' hay una cantidad insuficiente de funciones para que esta afirmación inversa tenga lugar.

§ 4.10. Completitud de funciones trigonométricas

En el § 4.4 hemos citado los criterios de convergencia de la serie de Fourier. Se trataba allí de una convergencia corriente. Ahora enunciemos el criterio de convergencia de la serie de Fourier en media cuadrática.

El conjunto de todas las funciones f de período 2π acotadas sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y continuas sobre éste, a excepción, quizás, de un número finito de puntos donde f tiene la discontinuidad de primer género, lo designemos por $L_2' * = L_2' * (-\pi, \pi)$.

Si la función $f \in L_2'^*$, *entonces su serie de Fourier*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx), \tag{1}$$

$$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{\begin{matrix} \cos kt \\ \operatorname{sen} kt \end{matrix}\right\} dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

converge hacia ella en media cuadrática, o sea,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{2}$$

donde

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

En el caso dado la fórmula (1), que tiene el signo de igualdad, debe leerse así: la función $f(x)$ es la suma de su serie de Fourier que converge hacia ella (sobre el segmento $[-\pi, \pi]$) en media cuadrática.

Calculemos directamente la integral en (2), teniendo en cuenta las propiedades ortogonales de las funciones trigonométricas,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \right]^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - 2\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \right) +$$

$$+ \frac{a_0^2}{2} \pi + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2).$$

Para la función $f \in L_2'^*$ esta expresión, cuando $n \to \infty$, tiende a cero. Pero entonces tiene lugar la igualdad

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (f \in L_2'^*) \tag{3}$$

llamada *igualdad de Parseval* para las funciones trigonométricas (*igualdad de Liapunov*).

Observación 1. Al comparar la fórmula (3) con la fórmula (7) del § 4.9, es necesario tener en cuenta que la última se ha deducido para el sistema ortonormalizado, mientras que la fórmula (3) que está examinándose se ha obtenido para un sistema ortogonal, pero no normalizado y tal es el sistema

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots.$$

Las funciones

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots$$

forman un sistema ortogonal sobre el segmento $[0, \pi]$. Tenemos el siguiente

TEOREMA 1. *Toda función* $f \in L_2'(0, \pi)$, *o sea, continua a trozos sobre* $[0, \pi]$ *se puede desarrollar en serie de Fourier respecto a los cosenos:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (5)$$

y, además, la serie (5) *converge hacia* f *en media cuadrática sobre* $[0, \pi]$.

En efecto, esta función puede prolongarse sobre $[-\pi, \pi]$ del modo par y luego periódicamente, de período 2π, sobre todo el eje real. Se obtendrá la función $f \in L_2'^*$. La serie de Fourier de la función f respecto a las funciones $1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots$ en virtud del carácter par de f tiene exactamente la forma (5) y, como ya sabemos, esta serie converge hacia $f(x)$ en media cuadrática sobre $[-\pi, \pi]$. Con mayor razón ella converge hacia la función indicada en media cuadrática sobre $[0, \pi]$.

Lo dicho se puede expresar con las palabras siguientes: *el sistema de funciones* (4) *es ortogonal y es un sistema completo en* $L_2'(0, \pi)$.

Es justa asimismo la afirmación:

El sistema de funciones

$$\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \ldots \qquad (6)$$

ortogonal precisamente es un sistema completo en $L_2'(0, \pi)$, o sea, tiene lugar el siguiente

TEOREMA 2. *Toda función* $f \in L_2'(0, \pi)$ *puede ser desarrollada en serie de Fourier respecto a los senos*:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\, dt \quad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (7)$$

la cual converge a ella en media cuadrática sobre $[0, \pi]$.

La ortogonalidad del sistema (6) se comprueba directamente y de hecho se deduce de (2) del § 4.5. En cuanto a su completitud, ésta se deriva de las consideraciones siguientes.

Prolonguemos la función $f \in L_2'(0, \pi)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ de un modo impar y luego periódicamente, de período 2π. Su serie de Fourier respecto al sistema $1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots$ converge en media cuadrática sobre $[-\pi, \pi]$. Con mayor razón ella converge en este sentido sobre $[0, \pi]$. Además, esta serie tiene la forma (7).

EJEMPLO 1. Desarrollar la función $y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ en serie respecto a los senos.

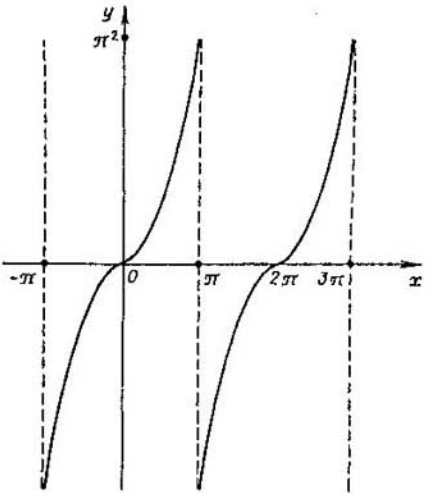

Fig. 118.

Vamos a prolongar esta función de un modo impar sobre $[-\pi, 0]$ y luego periódicamente, con período de 2π, sobre todo el eje real. Entonces la serie de Fourier de esta función $\psi(x)$ será formada solamente por los senos:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} kx\, dx = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k} + \frac{4}{\pi k^3}[(-1)^k - 1],$$

de donde

$$b_{2k} = -\frac{\pi}{k}, \quad b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^3}.$$

Ahora bien,

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx.$$

El gráfico de la suma de esta serie está representado en la fig. 118.

§ 4.11. Forma compleja de la serie de Fourier

Sean a_k y b_k los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$. En virtud de las fórmulas de Euler

$$a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx =$$

$$= a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx},$$

donde (supondremos $b_0 = 0$)

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}. \qquad (1)$$

De aquí

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos kt - i \operatorname{sen} kt)\, f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2} f(t)\, e^{-ikt} dt,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos kt + i \operatorname{sen} kt)\, f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{ikt} dt.$$

Estas dos igualdades pueden escribirse como una sola fórmula

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (2)$$

Es importante señalar que si $f(x)$ es una función real, entonces a_k y b_k son números reales y los números c_k y c_{-k}, aunque, en general, sean complejos, son mutuamente conjugados:

$$c_{-k} = \bar{c}_k. \tag{3}$$

Es evidente que la n-ésima suma de la serie de Fourier de la función f se puede escribir en la forma

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{4}$$

y la misma serie de Fourier de la función f, en forma de la serie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{5}$$

Diremos que la serie (5) converge para el valor dado de x si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Ahora bien, una convergencia definida se llama *convergencia en valor principal*.

Es que podría considerarse la convergente si existiera el límite

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{-m}^{n} c_k e^{ikx}$$

cuando m y n crecen infinitamente de un modo independiente uno de otro.

Las funciones complejas

$$\{e^{ikx}\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{6}$$

forman un sistema ortogonal sobre el segmento $[0, 2\pi]$, ya que para $k \neq l$

$$(e^{ikx}, e^{ilx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{e^{ilx}} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \frac{e^{i(k-l)x}}{k-l}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

(la primera igualdad está notada según la definición del producto escalar para las funciones de valores complejos, véase la observación 2 del § 4.8). Luego

$$(e^{ikx}, e^{ikx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ikx} dx = 2\pi.$$

§ 4.12. Concepto de integral de Fourier. Integral reiterada de Fourier

Examinemos primeramente la función suave a trozos $f(x)$ de período 2π que satisface la propiedad

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{1}$$

Esto quiere decir que f es de período 2π, continua y tiene la derivada continua por doquier sobre el eje real, a excepción de los puntos cuya cantidad es finita sobre el período $[-\pi, \pi]$; con la particularidad de que en estos puntos existen los límites de f y f' por la derecha y por la izquierda. Además, suponemos que en todo punto se cumple la igualdad (1). Esta condición es esencial, naturalmente, sólo para los puntos de discontinuidad de f, porque en los puntos de continuidad ella se cumple automáticamente. Designemos por L_*' el conjunto de las funciones periódicas indicadas f.

Para cada función $f \in L_*'$ se puede examinar su serie de Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_k e^{ikx}, \tag{2}$$

donde

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{sen} kt\,dt \quad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{4}$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-ikt}dt \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots), \tag{5}$$

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2},\quad c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ b_0=0).$$

Escribamos, además, la N-ésima suma de la serie de Fourier de la función f:

$$S_N^*(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx)=\sum_{k=-N}^{N}c_k e^{ikx}. \tag{6}$$

En la teoría de las series de Fourier se demuestra que para toda función $f \in L_1^*$ tiene lugar

$$\lim_{N\to\infty} S_N^*(x) = f(x), \tag{7}$$

o sea, la *serie de Fourier de la función* $f \in L_1^*$ *converge hacia ella en todo punto* x.

Las integrales de Fourier pueden ser introducidas por analogía con las series de Fourier.

Examinemos ahora las funciones no periódicas f que son suaves a trozos y absolutamente integrables sobre el eje real. Para ellas, pues, la integral (impropia)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$$

es finita.

El término función suave a trozos se entiende así. La función f es continua y tiene la derivada continua para todos los puntos x del eje real, a excepción de un número finito de puntos donde la función f o su derivada f' es discontinua. No obstante, en los puntos de discontinuidad existen los límites por la derecha y por la izquierda tanto de f como de f'; en este caso tiene lugar la igualdad

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Designemos por $L' = L'(-\infty, \infty)$ el conjunto indicado de las funciones no periódicas.

Por analogía con los coeficientes de Fourier introducimos para las funciones $f \in L'$ las funciones

$$a(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ts\,dt \quad (-\infty < s < \infty), \tag{3'}$$

$$b(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\,st\,dt \quad (-\infty < s < \infty), \tag{4'}$$

$$c(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-ist}dt \quad (-\infty < s < \infty). \tag{5'}$$

Mientras que los coeficientes de Fourier se determinan para los valores discretos $k = 0, 1, 2, \ldots$, sus análogos (3') a (5') son ya las funciones del argumento continuo s.

Según nuestra suposición la función f es continua a trozos; no obstante, las *funciones* $a(s)$, $b(s)$ y $c(s)$ *son continuas.*

Por ejemplo, supongamos, para mayor sencillez, que la función f tiene un solo punto de discontinuidad x_0. Entonces la integral (3') se puede partir en dos integrales

$$a(s)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\infty} f(t)\cos ts\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x_0} f(t)\cos ts\,dt. \tag{8}$$

Si la función $f(t)$ se modifica en el punto $t=x_0$, suponiendo que $f(x_0)=f(x_0+0)$, entonces bajo la primera integral en (8) se encontrará la función continua de s y t ($-\infty<s<\infty$, $x_0<t<\infty$). Según el criterio de Weierstrass (véase el § 2.15, teorema 3) la primera integral converge uniformemente, porque

$$|f(t)\cos ts|\leqslant|f(t)|,$$

$$\int_{x_0}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty.$$

Pero entonces la primera integral es una función continua de s (véase el § 2.15, teorema 1). De un modo semejante se demuestra también la continuidad según s de la segunda integral (8).

Notemos, además, que

$$\lim_{s\to\infty} a(s)=0, \tag{9}$$

$$\lim_{s\to\infty} b(s)=0, \tag{10}$$

$$\lim_{s\to\infty} c(s)=0. \tag{11}$$

Por ejemplo, para demostrar la propiedad (9) introduzcamos en la integral (3') la sustitución de la variable $t=u+\frac{\pi}{s}$. Entonces

$$a(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(u+\frac{\pi}{s}\right)\cos(su+\pi)\,du=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(u+\frac{\pi}{s}\right)\cos us\,du=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t+\frac{\pi}{s}\right)\cos ts\,dt.$$

De esta igualdad y de (3') se deduce:

$$|a(s)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(t+\frac{\pi}{s}\right)-f(t)\right]\cos ts\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(t+\frac{\pi}{s}\right)-f(t)\right|dt\to 0\quad(s\to\infty).$$

Esta última relación (tendencia a cero) debe ser demostrada, desde luego, pero no vamos a hacer esto ahora.

Como análogo de un término separado de la serie de Fourier (del armónico) es natural considerar la función
$a(s)\cos xs + b(s)\operatorname{sen} xs =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[\cos st\cos xs + \operatorname{sen} st\operatorname{sen} xs]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(t-x)\,s\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[e^{is(t-x)} + e^{-is(t-x)}]\,dt =$$

$$= c(s)\,e^{isx} + c(-s)\,e^{-isx}. \quad (12)$$

Más exactamente, en calidad de análogo de un término de la serie de Fourier es necesario considerar

$$(a(s)\cos xs + b(s)\operatorname{sen} xs)\,ds = (c(s)\,e^{isx} + c(-s)\,e^{-isx}\,ds. \quad (12')$$

Como análogo de la N-ésima suma de la serie de Fourier hace falta considerar la siguiente integral (véase (12)):

$$S_N(x) = \int_0^N [a(s)\cos xs + b(s)\operatorname{sen} xs]\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^N\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(t-x)\,s\,dt\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_0^N f(t)\cos(t-x)\,s\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\int_0^N \cos(t-x)\,s\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\operatorname{sen} N(t-x)}{t-x}\,dt. \quad (13)$$

Hemos cambiado de lugar las integrales. En el caso dado esto es legítimo. En virtud del teorema de Fubini [1], conocido en el análisis,

[1] G. Fubini (1879—1943), matemático italiano.

se pueden reordenar las integrales en una integral múltiple si después de la reordenación se obtiene una integral múltiple absolutamente convergente. En el caso dado

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{N}|f(t)\cos(t-x)s|\,dt\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{N}|f(t)|\,ds\,dt=\frac{N}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty.$$

En virtud de (12) la función $S_N(x)$ se puede escribir también en la forma compleja

$$S_N(x)=\int_{0}^{N}[c(s)e^{isx}+c(-s)e^{-isx}]\,ds=$$

$$=\int_{-N}^{N}c(s)e^{isx}ds=\int_{-N}^{N}e^{isx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ist}dt\,ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}e^{isx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ist}dt\,ds. \qquad (13')$$

La función

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\operatorname{sen}N(t-x)}{t-x}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u+x)\frac{\operatorname{sen}Nu}{u}\,du \qquad (14)$$

se llama *integral simple de Fourier*.

Se puede demostrar que si $f\in L'(-\infty,\infty)$, para todo valor de x

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x)=f(x), \qquad (15)$$

o sea, tiene lugar una propiedad análoga a la propiedad de (7) para las series de Fourier.

Notemos que la N-ésima suma de la serie de Fourier de una función periódica se puede escribir del modo siguiente (las explicacio-

nes se dan a continuación):

$$S_N^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt \cos kx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\, dt \operatorname{sen} kx \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N} (\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx) \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos k(t-x) \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\operatorname{sen} (N+1/2)(t-x)}{2 \operatorname{sen} ((t-x)/2)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\operatorname{sen} (N+1/2)\, u}{2 \operatorname{sen} (u/2)}\, du. \qquad (16)$$

En la penúltima igualdad hemos hecho uso de la fórmula (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 9.8, (15))

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos k\alpha = \frac{\operatorname{sen} (N+1/2)\, \alpha}{2 \operatorname{sen} (\alpha/2)}.$$

En la última igualdad (16) hemos sustituido la variable $t = u + x$. En virtud de esta sustitución la integral sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ respecto a t se transformará en integral sobre $[x - \pi, x + \pi]$ respecto a u, pero el último segmento se puede volver a sustituir por el segmento $[-\pi, \pi]$, porque la función subintegral (de u) es de período 2π (véase § 4.3, (3)).

Vemos que la integral en el segundo miembro de (16) se parece mucho a la integral (14). Por eso ya no es tan sorprendente el que ambas estas dos integrales tiendan, cuando $N \to \infty$, hacia la función $f(x)$.

De (13) y (15) se deduce que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^N ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos (t-x)\, s\, dt = f(x). \qquad (17)$$

Por consiguiente, para toda función $f \in L'$ $(-\infty, \infty)$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t-x)\, s\, dt = f(x). \tag{18}$$

Es una igualdad muy importante que constituye la base en la teoría de las integrales de Fourier.

La integral en (18) se llama *integral reiterada de Fourier.*

La igualdad (18) afirma que *para las funciones* $f \in L'$ $(-\infty, \infty)$ *la integral reiterada de Fourier de* f *en el punto* x *es igual al valor de la función* f *en el punto* x.

En la integral de (18) no se puede cambiar el orden de integración, puesto que no se conseguiría ya nada útil. Si hubiéramos hecho tal sustitución, habríamos debido integrar respecto a s la función $\cos(t-x)s$ (siendo fijos los valores de t y x) sobre el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$, pero tal integral no tiene significado.

Ahora bien, en la integral reiterada de (18) debemos integrar primeramente la función $f(t)\cos(t-x)\,s$ respecto a t sobre $(-\infty, \infty)$ y luego, respecto a s sobre $(0, \infty)$. Ambas integrales son impropias. Es evidente que la integral respecto a t converge absolutamente. En lo que se refiere a la integral respecto a s, hablando en general, esto no es así.

Las letras s y t en la integral de (18), siempre que se desee, pueden ser sustituidas naturalmente, por otras letras cualesquiera, por ejemplo, por s' y t' lo que no cambiará la magnitud de la integral.

De (13) y (15) hemos obtenido la fórmula (18). Por otro lado, de (13') y (15) hemos obtenido otra fórmula importante que es justa para las funciones $f \in L'$ $(-\infty, \infty)$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{isx} ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)\, e^{-ist} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist} dt = f(x). \tag{19}$$

Introduzcamos las designaciones

$$\tilde{f}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t)\, e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ixt} dt = \sqrt{2\pi}\, c(x),$$

$$\hat{f}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t) e^{ixt}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ixt} dt = \sqrt{2\pi}\, c(-x).$$

$\tilde{f}(x)$ se llama *transformación de Fourier* o *transformación directa de Fourier de la función* f y $\hat{f}(x)$ se denomina *transformación inversa de Fourier de la función* f. *Las operaciones* $\sim$ *y* $\wedge$ *son recíprocamente inversas.* Si se aplica a la función f la operación $\sim$ y se aplica a la función obtenida $\tilde{f}$ la operación $\wedge$, entonces, como se ve de (19), volvemos a obtener la función f:

$$\hat{\tilde{f}} = f.$$

PROBLEMA 1. Demostrar las fórmulas siguientes para las funciones $f \in L'(-\infty, \infty)$:

1) $\hat{f}(-t) = \tilde{f}(t)$;

2) $\tilde{f}(-x) = \hat{f}(x)$;

3) $\widetilde{f(at)} = \frac{1}{|a|}\tilde{f}(x/a)$;

4) $\widehat{f(at)} = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a \neq 0)$;

5) $e^{i\mu t}\tilde{f} = \widetilde{e^{-i\mu t}\hat{f}} = f(x+\mu)$ (μ es un número real);

6) $\tilde{\hat{f}} = f$.

Por ejemplo,

$$e^{i\mu t}\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t}e^{ixt}\,dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-iut}\,du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu+x)t}\,dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-iut}\,du = \hat{\tilde{f}}(\mu+x) = f(\mu+x).$$

§ 4.13. Coseno y seno transformaciones de Fourier

En virtud del § 4.12, (18) para $f \in L'(-\infty, \infty)$ tiene lugar la igualdad

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(t-x)\,s\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs\, ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ts\, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} xs\, ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} ts\, dt. \quad (1)$$

Si la función $f(t)$ es par, la segunda integral en el segundo miembro de (1) es igual a cero y en la primera integración respecto a t sobre $(-\infty, \infty)$ se reduce a la integración sobre $(0, \infty)$ y obtenemos la fórmula

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs\, ds \int_0^{\infty} f(t) \cos ts\, dt = f(x). \quad (2)$$

Para la función impar $f(t)$ la primera integral por la derecha en (1) es igual a cero y la función $f(t) \operatorname{sen} ts$ es par. Por eso

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} xs\, ds \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} ts\, dt = f(x) \quad (3)$$

En las fórmulas (2) y (3) se puede suponer que $x \geqslant 0$ y $f(t)$ es una función suave a trozos arbitraria, perteneciente a $L'(0, \infty)$. Es que en estas fórmulas se utilizan solamente los valores de f sobre el semieje $[0, \infty)$. Aclaremos esta observación más detalladamente.

Supongamos que se da una función suave a trozos $f \in L'(0, \infty)$ tal que $f(0) = f(0 + 0)$. Prolongándola sobre todo el eje real de un modo par, obtenemos una función suave a trozos par $f \in L'(-\infty, \infty)$ para la cual es justa la fórmula (2); en particular, es justa para $x \geqslant 0$.

Ahora supongamos que para nuestra función suave a trozos $f \in L'(0, \infty)$ se cumple la igualdad $f(0) = 0$ (en general, $f(0 + 0) \neq f(0)$). Prolonguemos f de un modo impar sobre $(-\infty, \infty)$, obteniendo una función suave a trozos impar $f \in L'(-\infty, \infty)$ para la cual es justa la fórmula (3); en particular, es justa para $x \geqslant 0$. Recalquemos que en la fórmula (3) $f(0) = 0$, mientras que en la fórmula (2) el valor de $f(0) = f(0 + 0)$ puede ser cualquiera.

Las integrales

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ts\, dt, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} ts\, dt$$

se llaman *coseno* y *seno transformaciones de Fourier*, respectivamente. De las fórmulas (2) y (3) se deduce directamente que si aplicamos sivamente dos veces la coseno (o seno) transformación de Fourier

a la función suave a trozos $f \in L'(0, \infty)$, obtendremos la función inicial f. En este sentido la coseno (seno) transformación de Fourier es inversa a sí misma.

§ 4.14. Ejemplos

Son válidas las igualdades (las explicaciones se dan a continuación)

1) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & 0 \leqslant |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \cos xs \frac{\operatorname{sen} as}{s} ds.$

2) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sign} x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \operatorname{sen} xs \frac{1 - \cos s}{s} ds.$

3) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & a < x < b \\ 0, & x < a,\ b < x \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} s(x-a) - \operatorname{sen} s(x-b)}{s} ds.$

4) $\int\limits_0^\infty e^{-as} \cos sx\, ds = \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$

5) $\int\limits_0^\infty e^{-as} \operatorname{sen} sx\, ds = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$

6) $e^{-as} = \frac{2a}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\cos xs}{a^2 + x^2} dx \quad (a > 0,\ 0 \leqslant s \leqslant \infty).$

7) $e^{-as} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{x}{a^2 + x^2} \operatorname{sen} xs\, dx \quad (a > 0,\ 0 < s < \infty).$

8) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen} x, & |x| \leqslant \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} s\pi}{1 - s^2} \operatorname{sen} sx\, ds.$

9) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\cos \frac{s\pi}{2}}{1 - s^2} \cos sx\, ds.$

10) $f(x) = e^{-\alpha |x|} \cos \beta x =$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos sx \left[\frac{1}{(s-\beta)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(s+\beta)^2 + \alpha^2} \right] ds \quad (\alpha > 0).$$

11) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \operatorname{sen} \beta x =$

$$= \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^\infty \frac{s \operatorname{sen} sx \, ds}{[(s-\beta)^2+\alpha^2][(s+\beta)^2+\alpha^2]} \quad (\alpha > 0).$$

Valiéndose de métodos corrientes de la teoría de las integrales indefinidas, no se ve cómo se pueden calcular las integrales que están en los segundos miembros de las igualdades 1), 2), 3). Por otra parte, las funciones 1), 2), 3) son suaves a trozos y pertenecen a $L'(-\infty, \infty)$ ($f \in L'(-\infty\ \infty)$). Por eso se les puede aplicar la fórmula de representación (1) del § 4.13. Esta fórmula se simplifica y tiene la forma de (2) del § 4.13 si f es una función par y si f es impar, tiene la forma de (3) del § 4.13. Por ejemplo, la función (1) es par y por eso

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xs \, ds \int_0^\pi \cos ts \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xs \frac{\operatorname{sen} s\pi}{s} \, ds$$

donde se puede suponer que en los puntos de discontinuidad de f se cumple la igualdad

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Las integrales 4) y 5) se calculan integrando por partes.

Utilizando la igualdad (4), tenemos

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos xs}{a^2+x^2} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xs \, dx \int_0^\infty e^{-a\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda = e^{-a|s|}$$

donde la última igualdad tiene lugar en virtud de la fórmula (2) del § 4.13 que es aplicable, porque $e^{-a\lambda} \in L'(0, \infty)$ es una función suave. De suerte que la igualdad 6) queda demostrada.

Por unos razonamientos semejantes se obtiene la fórmula 7) a partir de 5), aplicando la fórmula (3) del § 4.13.

La función 8) es suave a trozos e impar. Para obtener la integral necesaria, representémosla mediante la fórmula (3) del § 4.13 donde la integral interior es igual a

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} st \, f(t) \, dt = \int_0^\pi \operatorname{sen} st \operatorname{sen} t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos t(s-1) - \cos t(s+1)] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen} \pi(s-1)}{s-1} - \frac{\operatorname{sen} \pi(s+1)}{s+1} \right] = \frac{\operatorname{sen} \pi s}{1-s^2}.$$

La representación de la función 9) se obtiene análogamente a la aplicación de la fórmula (2) del § 4.13.

La función 10) es par. Para obtener la integral necesaria, representémosla por la fórmula (2) del § 4.13 donde la integral interior es igual a

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos\beta t\cos st\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta+s)\,t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta-s)\,t\,dt =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{(\beta+s)^2+\alpha^2} + \frac{1}{(\beta-s)^2+\alpha^2}\right].$$

La última igualdad se ha escrito en virtud de 4).

Razonamientos análogos son válidos para la función 11) con la utilización de la fórmula (3) del § 4.13.

Por último, vamos a citar un ejemplo más cuyo método de cálculo se distingue de los precedentes.

12) Hallar la coseno transformación de la función $\exp(-t^2)$. Sea

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda^2)\cos\lambda s\,d\lambda = I(s).$$

Es fácil ver que (véase el § 2.13, ejemplo 3)

$$I(0) = \int_0^\infty \exp(-\lambda^2)\,d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Derivando la función $I(s)$, obtenemos

$$I'(s) = -\int_0^\infty \lambda\exp(-\lambda^2)\operatorname{sen}\lambda s\,d\lambda$$

(la derivación es legítima, puesto que la última integral converge uniformemente). Integrando por partes, la derivada $I'(s)$ se puede representar en la forma ($\lambda\exp(-\lambda^2)\,d\lambda = dv$, $\operatorname{sen}\lambda s = u$)

$$I'(s) = \frac{\operatorname{sen}\lambda s}{2}\exp(-\lambda^2)\Big|_{\lambda=0}^{\infty} - \frac{s}{2}\int_0^\infty \exp(-\lambda^2)\cos\lambda s\,d\lambda = -\frac{s}{2}I(s).$$

Resolviendo la última ecuación diferencial de primer orden, tenemos

$$\frac{dI}{I} = -\frac{s}{2}\,ds, \quad \ln\left|\frac{I}{C}\right| = -\frac{s^2}{4}, \quad I(s) = C\exp\left(-\frac{s^2}{4}\right).$$

De la condición $I(0) = \sqrt{\pi}/2$ encontramos que $C = \sqrt{\pi}/2$. Ahora bien,

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda^2)\cos\lambda s\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{s^2}{4}\right).$$

§ 4.15. Aproximación de una integral de Fourier

Aclaremos el significado físico del concepto de integral de Fourier. Examinemos un movimiento aperiódico para el cual la ordenada y en cierto punto es la función $y = f(x)$, del tiempo x.

La función $f(x)$ se puede escribir del modo siguiente:

$$f(x) = \int_0^\infty \left[a(s)\cos xs + b(s)\operatorname{sen} xs\right] ds = \int_0^\infty \left[c(s)\,e^{-isx} + c(-s)\,e^{isx}\right] ds.$$

Cuando N es suficientemente grande y luego cuando Δs ($\Delta s = \Delta s_j$) son suficientemente pequeños, con cierta aproximación

$$f(x) \sim \int_0^N [a(s)\cos xs + b(s)\operatorname{sen} xs]\,ds =$$

$$= \int_0^N \left[c(s)\,e^{-isx} + c(-s)\,e^{isx}\right] ds \sim$$

$$\sim \sum_j \left[a(s_j)\cos xs_j + b(s_j)\operatorname{sen} xs_j\right]\Delta s =$$

$$= \sum_j \left[c(s_j)\,e^{-ixs_j} + c(-s_j)\,e^{ixs_j}\right]\Delta s. \qquad (1)$$

La primera aproximación se puede realizar con cualquier precisión en todo caso si las integrales de $a(s)$ y $b(s)$ (y, por consiguiente, también de $c(s)$) convergen absolutamente sobre $(0, \infty)$, en particular si las funciones $a(s)$ y $b(s)$ (y, por lo tanto, también $c(s)$) son iguales a cero para $s > s_0$, donde s_0 es cierto número. La segunda aproximación se puede realizar, en todo caso, para los valores de x pertenecientes a un segmento dado arbitrario $[x_1, x_2]$. De esta manera (para el segmento dado $[x_1, x_2]$) se pueden seleccionar los números

necesarios s_j de modo que resulten racionales. Pero entonces el movimiento $y = f(x)$ será aproximadamente igual, en el segmento de tiempo $[x_1, x_2]$, a la suma de las oscilaciones armónicas que poseen incluso el período común.

Se llama *espectro de una función periódica* $f(x)$ el conjunto de los coeficientes de Fourier. Por el espectro, en particular, se ve de qué armónicos no triviales (no iguales idénticamente a cero) se compone el movimiento periódico $y = f(x)$.

Se llama *espectro de una función no periódica* $f(x)$ las funciones $a(s)$ y $b(s)$ que ella engendra o la función $c(s)$.

Si las funciones $a(s)$ y $b(s)$ son iguales a cero fuera del intervalo (p, q), entonces la suma que aproxima $f(x)$ por la fórmula (1) se compone de las oscilaciones armónicas con frecuencias $s_j \in (p, q)$.

La función $\tilde{f}(s) = \sqrt{2\pi}c(s)$ se denomina también espectro de f.

§ 4.16. Suma de Fejér [1]

Hemos examinado anteriormente las series de Fourier de las funciones $f(x)$ y hemos determinado los criterios suficientes de convergencia de la serie de Fourier hacia la función $f(x)$.

Los matemáticos Du Bois-Reymond y Fejér construyeron ejemplos de funciones continuas cuyas series de Fourier divergen en un punto o sobre el conjunto de todos los puntos racionales del período $[-\pi, \pi]$.

Ahora bien, si sólo es noto que la función $f(x)$ es continua, esto no será suficiente para decir que su serie de Fourier converge.

Para la convergencia es necesario imponer sobre la función f ciertas condiciones adicionales. Entre nuestros criterios había tales condiciones adicionales de que la función f tuviese la derivada o debiese satisfacer la condición de Dirichlet (debiese ser monótona a trozos o, como suele decirse, tener un número finito de máximos y mínimos).

A propósito, estas condiciones pueden ser sustituidas por otras, más generales que no someteremos a examen.

Designemos por C^* la clase de funciones periódicas y continuas sobre todo el eje real. En esta clase (espacio) se puede introducir la norma:

$$\|f\|_{C^*} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|.$$

Las propiedades de la norma (véase el § 4.8) se comprueban fácilmente.

Así, pues, la *serie de Fourier de la función* $f \in C^*$ no obligatoriamente converge hacia $f(x)$ en todos los puntos $x \in [-\pi, \pi]$.

[1] L. Fejér (1880—1959), ilustre matemático húngaro.

Por eso tiene gran importancia el hecho de que la serie de Fourier de una función arbitraria $f \in C^*$ se suma a esta última con ayuda del método de medias aritméticas (véase el § 9.16 de nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral») y, por lo demás, de un modo uniforme sobre todo el eje real. Asignemos la función $f \in C^*$ y formemos para ella la serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Supongamos que

$$S_n = S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

es la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de la función f y

$$\sigma_n = \sigma_n(f; x) = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} \tag{1}$$

es la n-ésima suma media aritmética de la serie de Fourier de la función f.

La función $\sigma_n(f; x)$ se llama *suma de Fejér de orden n*.

Nuestra primera tarea consistirá en obtener una expresión compacta para σ_n.

Puesto que (véase el § 4.12, (16))

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) \, dt,$$

entonces

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) \, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} D_k(t) \right\} dt.$$

Aquí

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k} \cos jt = \frac{\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$$

es el núcleo de Dirichlet.

Para simplificar la expresión entre llaves bajo el signo integral calculemos previamente la suma:

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \psi(x). \tag{2}$$

Multipliquemos ambos miembros de la igualdad (2) por $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$. Entonces obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n} [\cos kx - \cos(k+1)x] = 2\psi(x)\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

o bien

$$[1-\cos x] + [\cos x - \cos 2x] + \ldots + [\cos nx - \cos(n+1)x] = 2\psi(x)\operatorname{sen}\frac{x}{2},$$

$$1 - \cos(n+1)x = 2\psi(x)\operatorname{sen}\frac{x}{2}.$$

De la última igualdad encontramos que

$$\psi(x) = \frac{1-\cos(n+1)x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}. \tag{3}$$

En virtud de (3) obtenemos

$$\frac{1}{2} + \sum_{1}^{n} D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = \frac{\sum_{0}^{n} \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{n+1}{2}t}{2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}.$$

Ahora bien,

$$\sigma_n(f;\, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, F_n(t)\, dt, \tag{4}$$

donde

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2}\, t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} \right)^2. \tag{5}$$

La función $F_n(t)$ se llama *núcleo de Fejér de orden n*. Es fácil ver que

$$F_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} \cos kt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kt. \tag{6}$$

Por eso la suma $\sigma_n(x)$ puede escribirse, además, así:

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} nx). \tag{7}$$

Observación 1. De la fórmula (7) se ve que la suma de Fejér $\sigma_n(f;\, x)$ se distingue de la suma de Fourier $S_n(f;\, x)$ de la función $f(x)$ por el que cada término $(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$ de la suma $S_n(f;\, x)$ está multiplicado por el número

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n+1} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Notemos las propiedades siguientes del núcleo de Fejér $F_n(t)$:

1) $F_n(t)$ es un polinomio trigonométrico par no negativo de orden (véase (5) y (6);

$$2)\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} F_n(t)\, dt = 1, \tag{8}$$

(véase (6), tener en cuenta la ortogonalidad de la función cos kx $(k = 1,\ \ldots,\ n)$ a la unidad;

3) para todo número $\delta > 0$

$$\int_{\delta}^{\pi} F_n(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)^2} \leqslant \frac{1}{2(n+1)\left(\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right)^2} \int_{\delta}^{\pi} dt =$$

$$= \frac{\pi-\delta}{2(n+1)\left(\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right)^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

TEOREMA 1 (DE FEJÉR). *Para toda función $f(x)$ continua sobre un eje real de período 2π (o sea, $f \in C^*$) la suma de Fejér de orden n tiende uniformemente hacia ella cuando $n \to \infty$, es decir,*

$$\| f - \sigma_n(f) \|_{C^*} = \max_x | f(x) - \sigma_n(f; x) | \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{9}$$

DEMOSTRACION. En virtud de la propiedad 2) del núcleo de Fejér tenemos

$$\sigma_n(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t)\,dt - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t)\,dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] F_n(t)\,dt. \tag{10}$$

En virtud de (10) y de la propiedad 1) del núcleo $F_n(t)$ tenemos

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) f(x+t) - f(x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leqslant \delta} F_n(t) |f(x+t) - f(x)|\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta < |t| \leqslant \pi} F_n(t) |f(x+t) - f(x)|\,dt, \tag{11}$$

donde $\delta > 0$ es un número arbitrario ($0 < \delta < \pi$).

Puesto que según la condición del teorema la función $f(x)$ es continua sobre $[-\pi, \pi]$, ella está obligatoriamente acotada

$$|f(x)| \leqslant M \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

Entonces

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant 2M \tag{12}$$

para todos los valores de $x \in [-\pi, \pi]$ y $\delta < |t| \leqslant \pi$.

Luego, la función $f(x)$ es uniformemente continua sobre $[-\pi, \pi]$, por eso para todo valor de $\varepsilon > 0$ se puede indicar un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{13}$$

para $|t| \leqslant \delta$ y todos los valores de x, $x + t \in [-\pi, \pi]$.

Ahora, al tomar en (11) el valor de δ tal que se indica en (13), en virtud de la propiedad 2) del núcleo, teniendo en cuenta (12) y (13), obtenemos

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \delta} F_n(t)\, dt + \frac{2M}{\pi} \int\limits_{\delta < |t| \leqslant \pi} F_n(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, dt + \frac{2M}{\pi} \int\limits_{\delta < |t| \leqslant \pi} F_n(t)\, dt =$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{4M}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} F_n(t)\, dt.$$

Ahora, cuando n_0 es lo suficientemente grande, en virtud de la propiedad 3) del núcleo $F_n(t)$ el segundo sumando del segundo miembro en la última desigualdad se puede hacer menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Así, pues, finalmente obtenemos

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n > n_0,\ x \in [-\pi, \pi]).$$

Por lo tanto,

$$\|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_{C^*} = \max_x |\sigma_n(f; x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad (n > n_0), \tag{14}$$

o sea, la sucesión $\{\sigma_n(f; x)\}$ converge uniformemente sobre $[-\pi, \pi]$ hacia la función $f(x)$. El teorema queda demostrado.

Ya hemos señalado anteriormente que las medias aritméticas de una serie numérica pueden tender hacia el límite, mientras que la misma serie puede divergir (véase el § 9.16, ejemplo 2, en nuestro libro «Matemáticas Superiores. Cálculo diferencial e integral»). Este fenómeno tiene lugar precisamente para las series de Fourier de funciones continuas. Existe una función continua cuya serie de Fourier diverge sobre el conjunto de todos los números racionales (conjunto numerable); sin embargo, como hemos mostrado, esto no impide que las sumas medias aritméticas de Fourier para toda función continua f converjan hacia $f(x)$, e incluso uniformemente.

COROLARIO (TEOREMA DE WEIERSTRASS). *Para toda función $f(x)$ continua y periódica sobre un eje real y para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico $T_n(x)$ tal que*

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in [-\pi, \pi]).$$

Para la demostración es suficiente considerar como $T_n(x)$ la suma de Fejér $\sigma_n(f; x)$.

§ 4.17. Completitud de los sistemas de funciones en C y α_2''

El sistema de las funciones

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \quad \ldots \tag{1}$$

continuas sobre el segmento $[a, b]$ se llama *completo* en el espacio $C[a, b]$ de funciones continuas, si para toda función $f \in C[a, b]$ y para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe una combinación lineal finita de estas funciones

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \tag{2}$$

tal que para todos los valores de $x \in [a, b]$ se cumpla la inecuación

$$|f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)| < \varepsilon.$$

Se dice, además, que el sistema (1) es *completo* en el espacio $L_2'(a, b)$, si para toda función $f \in L_2'(a, b)$ y para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe una combinación lineal (2) tal que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right\|_{L_2'} = \left(\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Es fácil ver que si el sistema (1) es completo en $C[a, b]$, será completo asimismo en $L_2'(a, b)$, porque

$$\left(\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b \varepsilon^2 \, dx \right)^{1/2} = \varepsilon \sqrt{b-a}.$$

En el § 4.9 hemos examinado un sistema arbitrario, ortonormalizado sobre el segmento $[a, b]$, de las funciones

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

y lo hemos llamado completo en $L_2'(a, b)$ si la serie de Fourier de toda función $f \in L_2'(a, b)$ en este sistema converge en media cuadrática hacia f.

Ahora bien, en el caso de un sistema ortonormalizado

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{3}$$

tenemos dos definiciones de la completitud en $L_2'(a, b)$. Son equivalentes. En efecto, supongamos que el sistema ortonormalizado (3) es completo en $L_2'(a, b)$ en el sentido del § 4.9 y supongamos que $f \in L_2'(a, b)$.

Entonces

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\, \varphi_k \right\|_{L_2'(a, b)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

y esto es lo que muestra que para todo valor de $\varepsilon > 0$ se puede indicar una combinación lineal $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$, donde $c_k = (f, \varphi_k)$ para la cual

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|_{L_2'(a, b)} < \varepsilon.$$

Por consiguiente, el sistema (3) es completo en $L_2'(a, b)$ también en el sentido de la segunda definición.

Al revés, si el sistema (3) es completo en el sentido de la segunda definición y viene dada la función $f \in L_2'(a, b)$, entonces para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe una combinación lineal

$$\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k$$

tal que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k \right\|_{L_2'(a, b)} < \varepsilon.$$

Pero según el teorema 1 del § 4.9

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} (f, \varphi_k)\, \varphi_k \right\|_{L_2'(a, b)} \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k \right\|_{L_2'(a, b)} < \varepsilon.$$

Tenemos luego para $n \geqslant n_0$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} (f, \varphi_k)\, \varphi_k \right\|^2_{L_2'(a, b)} =$$

$$= (f, f) - \sum_{k=1}^{n_0} (f, \varphi_k)^2 \geqslant (f, f) - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2 =$$

$$= \left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\, \varphi_k \right\|^2_{L_2'(a, b)}.$$

Por eso

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}(f,\ \varphi_k)\,\varphi_k\|_{L_2'(a,\,b)}<\varepsilon\quad(\forall\, n\geqslant n_0)$$

y, por consiguiente, la serie de Fourier de la función f converge en media cuadrática hacia la misma, o sea, el sistema (3) es completo en el sentido de la definición dada en el § 4.9.

En el § 4.9 hemos enunciado, sin demostrar, la afirmación importante de que la serie de Fourier de la función $f\in L_2'$ en el sistema trigonométrico converge en media cuadrática hacia f. Una vez demostrado el teorema de Weierstrass (véase el § 4.16) esta afirmación puede ser fundamentada en su totalidad.

En efecto, ya hemos hecho uso del teorema 1 del § 4.9, que afirma la validez de la igualdad

$$\min_{\alpha_k}\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\|=\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\|\ ,$$

donde c_k son los coeficientes de Fourier de la función $f\in L_2'$ en el sistema ortonormalizado $\{\varphi_k\}$. Notemos que esta igualdad tiene lugar asimismo para un sistema ortogonal arbitrario, no obligatoriamente normal. En este caso los coeficientes de Fourier

$$c_k=\frac{(f,\ \varphi_k)}{\|\varphi_k\|}\quad(k=1,\ \ldots,\ n).$$

El sistema trigonométrico

$$1,\ \cos x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos 2x,\ \operatorname{sen} 2x,\ \ldots$$

es ortogonal sobre el segmento $[-\pi,\ \pi]$.

El teorema de Weierstrass expresa el hecho de que este sistema es completo en C^*, pero entonces, como sabemos, es completo asimismo en el $L_2'^*$.

Y esto es lo que significa que la serie de Fourier de toda función $f\in L_2'^*$ en el sistema trigonométrico converge en media cuadrática hacia la misma.

§ 4.18. Nociones de la teoría de series múltiples de Fourier

Vamos a examinar las funciones $f(x)$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ de muchas variables, definidas sobre cierto rectángulo n-dimensional

$$\Delta=\{a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n\},$$

donde a_j y b_j son números reales.

De la teoría de integrales múltiples (véase el § 2.4, teorema 3) se deduce que si la función $f(x)$ integrable sobre Δ se puede representar en la forma del producto de las funciones integrables de una variable

$$f(x) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j),$$

entonces

$$\int_{\Delta} f(x)\,dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{\Delta_j} f_j(x_j)\,dx_j, \tag{1}$$

donde $\Delta_j = [a_j, b_j]$.

El rectángulo Δ se puede considerar como producto directo de los segmentos de Δ_j (véase el § 2.15, llamada 2))

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_n.$$

Notemos que en el primer miembro de la igualdad (1) se encuentra la integral múltiple de n y en el segundo miembro, las integrales unidimensionales de Riemann de las funciones $f_j(x_j)$ dadas sobre Δ_j.

Las funciones

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j} \quad (k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ j = 1, \ldots, n)$$

tienen, como sabemos, el período 2π según la variable x_j ($j = 1, \ldots, n$). Estas funciones (de una variable x_j) son continuas sobre todo el eje x_j y en el período $[-\pi, \pi]$ y, por lo tanto, son integrables según Riemann sobre el segmento $[-\pi, \pi]$. Además, sabemos que las funciones $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j}$ forman el sistema ortogonal $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j}\right\}$ sobre $[-\pi, \pi]$, o sea,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-il_j x_j}\,dx_j = \begin{cases} 0, & k_j \neq l_j, \\ 1, & k_j = l_j. \end{cases} \tag{2}$$

Introduzcamos las designaciones

$$k = (k_1, \ldots, k_n), \quad kx = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j,$$

$$\Delta_* = \Delta_*^{(n)} = \{-\pi \leqslant x_j \leqslant \pi,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Entonces en virtud de (1) y (2) las funciones

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \ldots e^{ik_n x_n} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} \quad (k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

de n variables serán ortogonales sobre el cubo Δ_*:

$$\int_{\Delta_*} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ilx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - l_j)x_j}\, dx_j = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Por igualdad de los vectores de números enteros k y l entendemos, como de ordinario, la igualdad de sus coordenadas respectivas y $k \neq l$ significa que los vectores k y l se distinguen al menos en una sola coordenada.

Vamos a examinar las funciones $f(x)$ de período 2π para cada una de las variables x_j, $j = 1, \ldots, n$.

Designemos por símbolo C^* la clase (espacio) de funciones periódicas continuas con la norma (véase el § 4.8)

$$\| f \|_{C^*} = \max_{x \in \Delta_*} | f(x) |.$$

El conjunto de todas las funciones periódicas continuas a trozos para las cuales se ha introducido el producto escalar con ayuda de la fórmula

$$(f, g) = \int_{\Delta_*} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \qquad (4)$$

lo designaremos por $L_2^{\prime *} \equiv L_2'(\Delta_*)$ y lo llamaremos espacio $L_2^{\prime *}$. La norma se introduce en esta clase (espacio) así:

$$\| f \| = \| f \|_{L_2^{\prime *}} = \left(\int_{\Delta_*} | f(x)^2\, dx \right)^{1/2}.$$

El hecho de que $f(x)$ es una función continua a trozos significa lo siguiente: el cubo Δ_* (período) se puede cortar en un número finito de partes con ayuda de superficies suaves a trozos (con una dimensión menor que n) de modo que sobre cada parte la función $f(x)$ sea continua, mientras que a lo largo de los cortes pueda tener discontinuidades.

Todas las propiedades de la norma (véase el § 4.8) para el espacio $L_2^{\prime *}$ se han cumplido. Por función nula ($f = 0$) entendemos una función igual a cero por doquier sobre Δ_*, a excepción de un número finito de superficies suaves a trozos.

Por ejemplo, si se trata de funciones de dos variables, admitimos que la función nula $f(x_1, x_2)$ puede no ser igual a cero en un número finito de puntos de Δ_* o sobre un número finito de curvas suaves a trozos.

Notemos que la medida n-dimensional de Jordan de las superfi-

cies indicadas es igual a cero, por eso la integral múltiple de n de la función nula tomada sobre Δ_* es igual a cero.

Supongamos ahora que la función $f(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ es de período 2π para cada una de las variables y es noto que puede ser desarrollada en serie múltiple:

$$f(t) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \equiv \sum c_k e^{ikt}, \tag{5}$$

donde la última suma concierne a todos los vectores posibles $k = (k_1, \ldots, k_n)$ con coordenadas enteras.

Se pregunta ¿cómo determinar a partir de la función $f(t)$ los coeficientes c_k?

Aquí se puede proceder igual que hemos hecho en el § 4.3 en el caso unidimensional, o sea, para la función f de una variable real.

Si la serie (5) converge uniformemente sobre Δ_*, entonces (al igual que para la función de una variable, véase el § 4.6)

$$c_k(f) \equiv c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} f(t)\, e^{-ikt}\, dt. \tag{6}$$

Los números c_k calculados por la fórmula (6) se llaman *coeficientes de Fourier de la función $f(t)$* y la serie (5), en la cual de c_k están sustituidos por los coeficientes de Fourier se denomina *serie de Fourier de la función $f(t)$ en la forma compleja* (véase el § 4.11).

Pues, si la función $f(t) = f(t_1, \ldots, t_n)$ se puede representar en forma de suma de una serie múltiple (5) que converja uniformemente sobre Δ_*, entonces los números c_k serán necesariamente coeficientes de Fourier de la función $f(t)$.

Si en la serie (5) los coeficientes c_k están calculados por las fórmulas (6), entonces la llamaremos serie de Fourier de la función $f(t)$ sin importar converge esta serie hacia $f(t)$ o no. En este caso escribiremos

$$f(t) \sim \sum c_k e^{ikt}. \tag{7}$$

Si la función $f \in C^*$, la serie (7) no obligatoriamente convergirá hacia $f(t)$ en todos los puntos $t \in \Delta_*$ (véase el § 4.16).

Asignemos el vector $N = (N_1, \ldots, N_n)$, donde N_j son los números naturales y determinemos la respectiva suma particular de Fourier de la función f del modo siguiente:

$$S_N(f; x) = \sum_{\substack{|k_j| \leqslant N_j \\ j=1,\ldots,n}} c_k e^{ikx} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} \sum_{|k_j| \leqslant N_j} e^{-ik(t-x)} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \prod_{j=1}^{j=1,\ldots,n} D_{N_j}(t_j - x_j)\, f(t)\, dt, \tag{8}$$

donde

$$D_{N_j}(u)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N_j}\cos ku=\frac{\operatorname{sen}\left(N_j+\frac{1}{2}\right)u}{2\operatorname{sen}\frac{u}{2}}$$

es el núcleo de Dirichlet de orden N_j. Aquí hemos hecho uso de la fórmula de Euler: $e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x$.

En particular, si $N_1=N_2=\ldots=N_n=N$, entonces

$$S_N(f;x)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*}\prod_{j=1}^{n}D_N(t_j-x_j)f(t)\,dt. \tag{8'}$$

El análogo multidimensional de la suma de Fejér tiene la forma

$$\sigma_N(f;x)=\frac{\sum\limits_{k_1=0}^{N_1}\cdots\sum\limits_{k_n=0}^{N_n}S_k(f;x)}{(N_1+1)\ldots(N_n+1)}\equiv\frac{\sum\limits_{k=0}^{N}S_k(f;x)}{(N_1+1)\ldots(N_n+1)}=$$
$$=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*}\Phi_N(t-x)f(t)\,dt=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*}\Phi_N(u)f(u+x)\,du, \tag{9}$$

donde

$$\Phi_N(u)=\prod_{j=1}^{n}F_{N_j}(u_j),\quad F_{N_j}(t)=\frac{1}{2(N_j+1)}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{N_j+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right)^2 \tag{10}$$

es el núcleo de Fejér de orden N_j. Si $N_1=\ldots=N_n=N$, entonces en la fórmula (9) el núcleo $\Phi_N(u)$ un poco se simplificará.

Puesto que $\Phi_N(u)\geqslant 0$, entonces

$$\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*}\Phi_N(u)\,du=1.$$

Luego si $\Delta_\varepsilon=\{|u_j|\leqslant\varepsilon,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$, entonces

$$\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_\varepsilon}\Phi_N(u)\,du\leqslant\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*}\Phi_N(u)\,du=1.$$

Además,

$$\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*\setminus\Delta_\varepsilon}\Phi_N(u)\,du\to 0 \tag{11}$$

cuando $N_1\to\infty,\ \ldots,\ N_n\to\infty$.

Demostremos la última propiedad para el caso bidimensional:

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\Delta_*\setminus\Delta_\varepsilon}\Phi_N(u)\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\Big(\int\limits_{|u_1|\leqslant\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u_2|\leqslant\pi}+\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u_1|\leqslant\pi}\int\limits_{|u_2|\leqslant\pi}\Big)\Phi_N(u)\,du\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u_2|\leqslant\pi}F_{N_2}(u_2)\,du_2+\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u_1|\leqslant\pi}F_{N_1}(u_1)\,du_1\Big)\to 0$$

cuando $N_1\to\infty$ y $N_2\to\infty$ (véase el § 4.16, propiedad 3) del núcleo de Fejér).

TEOREMA 1. *Si la función* $f(t)\in C^*$, *entonces*

$$\|f(x)-\sigma_N(f;x)\|_{C^*}\to 0\quad (N_j\to\infty,\ j=1,\ldots,n).$$

DEMOSTRACION. En virtud de la propiedad del núcleo $\Phi_N(u)$ tenemos

$$\sigma_N(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*}[f(x+t)-f(x)]\,\Phi_N(t)\,dt.$$

De aquí

$$|\sigma_N-f|\leqslant\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*}\Phi_N(t)\,|f(x+t)-f(x)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,|f(x+t)-f(x)|\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*\setminus\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,|f(x+t)-f(x)\,dt,$$

donde $\delta>0$ es un número arbitrario $(0<\delta<\pi)$.

Puesto que según la condición del teorema la función $f(x)$ es continua sobre Δ_*, ésta quedará acotada y uniformemente continua sobre Δ_*:

$$|f(x)|\leqslant M,\quad \forall x\in\Delta_*; \tag{12}$$

para todo valor de $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{13}$$

para $|t_j|<\delta$ $(j=1,\ldots,n)$ y para todos valores de x, $(x+t)\in\Delta_*$.

Ahora, tomando δ de (13), en virtud de las propiedades del núcleo $\Phi_N(t)$ obtenemos

$$|\sigma_N - f| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\pi^n}\int_{\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,dt + \frac{2M}{\pi^n}\int_{\Delta_*\setminus\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi^n}\int_{\Delta_*}\Phi_N(t)\,dt + \frac{2M}{\pi^n}\int_{\Delta_*\setminus\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi^n}\int_{\Delta_*\setminus\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,dt.$$

Ahora para el vector N^0 con coordenadas lo suficientemente grandes, en virtud de la propiedad (11), en la última desigualdad el segundo sumando del segundo miembro se puede hacer, para $N_j > N_j^0$ $(j = 1, \ldots, n)$, menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Entonces finalmente obtenemos

$$|\sigma_N(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

cuando $N_j > N_j^0$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\forall x \in \Delta_*$.

De aquí

$$\|\sigma_N(f; x) - f(x)\|_{C^*} \leqslant \varepsilon$$

y el teorema queda demostrado.

Observación 1. El teorema demostrado se puede expresar con las palabras siguientes: *si* $f \in C^*$, *entonces la sucesión de sus sumas de Fejér* $\sigma_N(f; x) = \sigma_{N_1,\ldots,N_n}(f; x)$ *converge uniformemente hacia la función* $f(x)$ *a condición de que* $N_1 \to \infty, \ldots, N_n \to \infty$.

Observación 2. El sistema de las funciones (3) es completo en C^* y, por consiguiente, asimismo en L_2^* (véase el § 4.17).

Observación 3. Ya hemos señalado que la serie múltiple de Fourier de una función continua no obligatoriamente converge hacia ella en todos los puntos de Δ_*. Sin embargo, la suma múltiple de Fejér $\sigma_N(f; x)$ de una función periódica continua f converge, como hemos demostrado más arriba, hacia $f(x)$ en todos los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_*$.

Es válido el siguiente

TEOREMA 2. *La serie de Fourier* (7) *de la función* $f \in L_2^*$ *converge en media cuadrática hacia* $f(x)$

$$\|f(x) - S_N(f; x)\|_{L_2^*} \to 0 \quad (N_1 \to \infty, \ldots, N_n \to \infty)$$

y tiene lugar la igualdad de Parseval

$$\|f\|_{L_2^*}^2 = \sum |c_k|^2.$$

LA DEMOSTRACION de esto teorema se puede llevar a cabo al igual que en el caso unidimensional (véanse los §§ 4.9 y 4.17), valiéndose de la observación 2 acerca de la completitud del sistema (3).

Examinemos ahora la serie de Fourier (7) en el caso bidimensional. Si hacemos uso de las fórmulas de Euler $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$, entonces (7) se transforma formalmente en serie

$$f(x, y) \sim \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k0}\cos kx + d_{k0}\operatorname{sen} kx) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(a_{0l}\cos ly + c_{0l}\operatorname{sen} ly) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(a_{kl}\cos kx\cos ly + b_{kl}\operatorname{sen} kx\operatorname{sen} ly + \\ + c_{kl}\cos kx\operatorname{sen} ly + d_{kl}\operatorname{sen} kx\cos ly), \quad (14)$$

donde hemos puesto

$$a_{kl} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u, v)\cos ku\cos lv\, du\, dv,$$

$$b_{kl} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u, v)\operatorname{sen} ku\operatorname{sen} lv\, du\, dv,$$

$$c_{kl} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u, v)\cos ku\operatorname{sen} lv\, du\, dv, \quad (15)$$

$$d_{kl} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u, v)\operatorname{sen} ku\cos lv\, du\, dv.$$

Observación 4. Si $f(u, v)$ es una función real, entonces a_{kl}, b_{kl}, c_{kl} y d_{kl} son los números reales.

Notemos que podríamos deducir la serie (14) directamente, partiendo del sistema de funciones, ortogonal sobre $\Delta_* = \{-\pi \leqslant x, y \leqslant \pi\}$,

$$\cos kx\cos ly,\ \operatorname{sen} kx\operatorname{sen} ly,\ \cos kx\operatorname{sen} ly,\ \operatorname{sen} kx\cos ly$$
$$(k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (16)$$

La serie (14), donde los números a_{kl}, b_{kl}, c_{kl} y d_{kl} se calculan por las fórmulas (15) se llama *serie de Fourier de la función f según el sistema trigonométrico de funciones* (16). Los números de (15) se denominan *coeficientes de Fourier de la función f según el sistema* (16).

Ahora bien, la serie múltiple de Fourier se puede escribir tanto en la forma compleja (7) como en la forma de una serie trigonométrica múltiple (14).

Si volvemos a examinar el caso n-dimensional, suponiendo que

$$f \in C^*, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \in C^*,$$

el coeficiente de Fourier c_k, donde $k_n \neq 0$, se puede transformar del modo siguiente:

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} e^{-ikt} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*^{(n-1)}} e^{-i\sum_{j=1}^{n-1} k_j t_j} dt_1 \ldots dt_{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_n t_n} f(t)\, dt_n;$$

integrando por partes en la última integral ($u = f(t)$, $e^{-ik_n t_n} dt_n = dv$) obtenemos

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*^{(n-1)}} e^{-i\sum_{j=1}^{n-1} k_j t_j} dt_1 \ldots dt_{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{ik_n} e^{-ik_n t_n} \frac{\partial f(t)}{\partial t_n} dt_n =$$

$$= \frac{1}{ik_n} c_k \left(\frac{\partial f}{\partial t_n} \right),$$

$$\Delta_*^{(n-1)} = \{-\pi \leqslant x_j \leqslant \pi,\ j = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

En general, si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es el vector entero no negativo dado y $f^{(\lambda)} \in C^*$, para un vector entero no negativo cualquiera $s \leqslant \lambda$ ($s_j \leqslant \lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$), entonces después de la aplicación respectiva del proceso de integración por partes (teniendo en cuenta la periodicidad de la función f y de todas sus derivadas) obtenemos:

$$c_k(f) = \frac{1}{i^{|\lambda|} k^\lambda} c_k\left(f^{(\lambda)}\right), \tag{17}$$

donde

$$|\lambda| = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j, \quad k^\lambda = k_1^{\lambda_1} k_2^{\lambda_2} \ldots k_n^{\lambda_n}$$

Además suponemos que si $k_j = 0$, entonces $\lambda_j = 0$ y $k_j^{\lambda_j} = 0^0 = 1$. Los números $c_k(f^{(\lambda)})$ son los coeficientes de Fourier de la derivada

$$f^{(\lambda)}(t) = \frac{\partial^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} f}{\partial t_1^{\lambda_1} \ldots \partial t_n^{\lambda_n}} = \frac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial t_1^{\lambda_1} \ldots \partial t_n^{\lambda_n}}.$$

TEOREMA 3. *Supongamos que* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *es un vector con componentes enteros positivos y la función* $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in C^*$, *junto con sus derivadas parciales* $f^{(k)}$ *del orden* $k \leqslant \lambda$ $(k_j, \lambda_j, j = 1, \ldots, n)$ *y se cumplen las inecuaciones*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} |f^{(l)}(x)|^2 \, dx \leqslant M^2 \tag{18}$$

para todo vector $l = (l_1, \ldots, l_n)$ *que tenga los componentes* l_j *iguales a cero o a* λ_j.

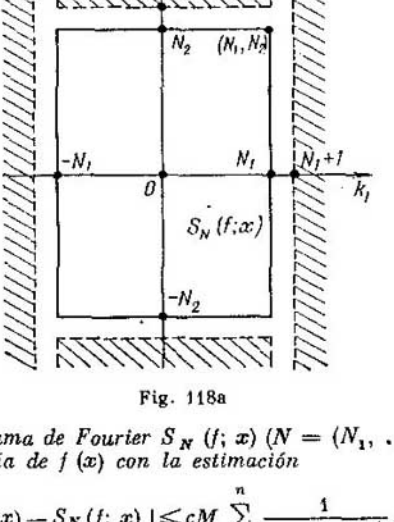

Fig. 118a

Entonces la suma de Fourier $S_N(f; x)$ $(N = (N_1, \ldots, N_n))$ *de la función* f *se desvía de* $f(x)$ *con la estimación*

$$|f(x) - S_N(f; x)| \leqslant cM \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(N_j+1)^{\lambda_j - \frac{1}{2}}}, \tag{19}$$

donde c *no depende de* M *ni de* N_j *y depende solamente de* λ.

DEMOSTRACIÓN. Para mayor sencillez, vamos a estimar el residuo de la serie de Fourier de la función en el caso bidimensional

$$\rho_N(f; x) = \Big(\sum_{|k_1|>N_1} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} + \sum_{|k_1|\leqslant N_1} \sum_{|k_2|>N_2} \Big) c_k e^{ikx}.$$

Si examinamos el plano de los puntos (k_1, k_2) (fig. 118a), entonces del término residual $\rho_N(f; x)$ forman parte los términos de la serie

de Fourier que corresponden a los puntos (k_1, k_2) con coordenadas de números enteros, pertenecientes a la parte rayada.

Tomando en cuenta que $|e^{i\lambda x}| = 1$, tenemos

$$|\rho_N(f; x)| \leqslant \Big(\sum_{|k_1|>N_1}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} + \sum_{|k_1|\leqslant N_1}\sum_{|k_2|>N_2}\Big)|c_k| =$$
$$= \sum_{|k_1|>N_1}|c_{k_1,0}| + \sum_{|k_1|>N_1}\sum_{|k_2|\geqslant 1}|c_k| +$$
$$+ \sum_{|k_2|>N_2}|c_{0,k_2}| + \sum_{1\leqslant|k_1|\leqslant N_1}\sum_{|k_2|>N_2}|c_k|.$$

En virtud de la fórmula (17) obtenemos

$$|\rho_N(f; x)| \leqslant \sum_{|k_1|>N_1}\frac{1}{|k_1|^{\lambda_1}}\left|c_{k_1,0}\left(\frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}}\right)\right| +$$
$$+ \sum_{|k_1|>N_1}\sum_{|k_2|\geqslant 1}\frac{1}{|k_1|^{\lambda_1}|k_2|^{\lambda_2}}\left|c_k\left(\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right| +$$
$$+ \sum_{|k_2|>N_2}\frac{1}{|k_2|^{\lambda_2}}\left|c_{0,k_2}\left(\frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right| +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|k_1|\leqslant N_1}\sum_{|k_2|>N_2}\frac{1}{|k_1|^{\lambda_1}|k_2|^{\lambda_2}}\left|c_k\left(\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right|.$$

Aplicando la desigualdad de Buniakovski para las sumas (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 6 (7)), obtenemos

$$|\rho_N(f; x)| \leqslant \Big(\sum_{|k_1|>N_1}\frac{1}{k_1^{2\lambda_1}}\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{|k_1|>N_1}\left|c_{k_1,0}\left(\frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}}\right)\right|^2\Big)^{1/2} +$$
$$+\Big(\sum_{|k_1|>N_1}\sum_{|k_2|\geqslant 1}\frac{1}{k_1^{2\lambda_1}k_2^{2\lambda_2}}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{|k_1|>N_1}\sum_{|k_2|\geqslant 1}\left|c_k\left(\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right|^2\Big)^{1/2} +$$
$$+\Big(\sum_{|k_2|>N_2}\frac{1}{k_2^{2\lambda_2}}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{|k_2|>N_2}\left|c_{0,k_2}\left(\frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right|^2\Big)^{1/2} +$$
$$+\Big(\sum_{1\leqslant|k_1|\leqslant N_1}\sum_{|k_2|>N_2}\frac{1}{k_1^{2\lambda_1}k_2^{2\lambda_2}}\Big)^{1/2}\times$$
$$\times\Big(\sum_{1\leqslant|k_1|\leqslant N_1}\sum_{|k_2|>N_2}\left|c_k\left(\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right|^2\Big)^{1/2}.$$

Ahora, en virtud de la igualdad de Parseval y de (18) tenemos, $(\lambda_j \geqslant 1,\ j = 1, \ldots, n)$,

$$|\rho_N(f; x)| \leqslant \frac{c}{(N_1+1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}}} \left\| \frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}} \right\|_{L_2'^*} + \frac{c}{(N_1+1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}}} \left\| \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right\|_{L_2'^*} +$$

$$+ \frac{c}{(N_2+1)^{\lambda_2-\frac{1}{2}}} \left\| \frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}} \right\|_{L_2'^*} + \frac{c}{(N_2+1)^{\lambda_2-\frac{1}{2}}} \left\| \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right\|_{L_2'^*} \leqslant$$

$$\leqslant cM \left(\frac{1}{(N_1+1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(N_2+1)^{\lambda_2-\frac{1}{2}}} \right).$$

Ahora bien,

$$|\rho_N(f; x)| \leqslant cM \left(\frac{1}{(N_1+1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(N_2+1)^{\lambda_2-\frac{1}{2}}} \right), \tag{20}$$

donde la constante c no depende de M ni de N_1, ni de N_2.

En el caso n-dimensional la estimación del residuo se puede llevar a cabo del modo semejante.

La estimación (20) dice que la serie de Fourier de la función $f(x)$ converge *uniformemente sobre* Δ_* *cuando* $\lambda_j \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$.

En virtud del teorema 2 la serie de Fourier de la función f converge en media cuadrática hacia $f(x)$. En tal caso esta serie converge de un modo uniforme justamente hacia la función $f(x)$ (véase a continuación el lema 1) y por eso

$$|\rho_N(f; x)| = |f(x) - S_N(f; x)| \leqslant cM \sum_{j=1}^{n} (N_j+1)^{-\lambda_j+\frac{1}{2}}$$

y el teorema queda demostrado.

COROLARIO 1. *Si la función* $f \in C^*$ *y sus derivadas parciales que tienen la forma*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_1 \ldots \partial x_{n-1}}, \ldots$$

$$\ldots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_2 \ldots \partial x_n}, \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \in C,$$

entonces la serie múltiple de Fourier de la función $f(x)$ *converge uniformemente sobre* Δ_* *hacia la función* $f(x)$.

LEMA 1. *Si la serie*

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots$$

de las funciones continuas sobre la región $\Omega \subset R_n$ *converge en media cuadrática hacia la función continua* $S(x)$ *y al mismo tiempo esta serie*

converge uniformemente sobre Ω *hacia la función* $\varphi(x)$, *entonces para todos los puntos* $x \in \Omega$

$$S(x) = \varphi(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $S_N(x)$ es la suma de los primeros N términos de la serie, $V \subset \Omega$ es una esfera arbitraria y

$$\varkappa_N = \max_{x \in V} | \varphi(x) - S_N(x) |.$$

Según la condición del lema $\varkappa_N \to 0$ $(N \to \infty)$. Por eso en virtud de la desigualdad triangular (véase el § 4.8)

$$\left(\int_V | S(x) - \varphi(x) |^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_V | S(x) - S_N(x) |^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_V | S_N(x) - \varphi(x) |^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_V | S(x) - S_N(x) |^2 dx \right)^{1/2} + \varkappa_N \cdot \sqrt{mV} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Por consiguiente, el primer miembro de la última inecuación es igual a cero (éste no depende de N):

$$\int_V | S(x) - \varphi(x)^2 | dx = 0.$$

Luego, puesto que según la condición la función $S(x)$ es continua sobre Ω y $\varphi(x)$ será continua también sobre Ω como suma de la serie uniformemente convergente de las funciones continuas, para todos los valores de $x \in V$

$$S(x) - \varphi(x) \equiv 0.$$

Si supusiéramos que existe al menos un punto x^0 en el cual

$$[S(x^0) - \varphi(x^0)]^2 > 0,$$

entonces obtendríamos que

$$\int_V [S(x) - \varphi(x)]^2 dx > 0$$

(véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 6.2, teorema 8).

Luego, puesto que V es una esera arbitraria que forma parte de la región Ω (conjunto conexo abierto), entonces

$$S(x) \equiv \varphi(x), \quad \forall x \in \Omega$$

y el lema queda demostrado.

TEOREMA 4. *Para la función* $f \in C^*$, *cuando un valor arbitrario de* $\eta > 0$, *tiene lugar la igualdad*

$$S_N(f;\ x) - f(x) = \frac{1}{\pi^n} \int_{K_\eta} \prod_{j=1}^{n} D_{N_j}(u_j)\,[f(x+u) - f(x)]\,du + o(1)$$

$$(N \to \infty) \quad (21)$$

uniformemente sobre toda región $\Omega \subset \Delta_*$.

Aquí el conjunto K_η (cruz) es la unión de los conjuntos

$$\Omega_{j,\,n} = \{|\,u_j\,| < \eta\} \quad (j = 1,\ \ldots,\ n),\ \text{o sea,}\ K_\eta = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_{j,\,n}.$$

El símbolo $N \to \infty$ significa que $N_1 \to \infty$, . . ., $N_n \to \infty$.

El teorema tiene lugar también si la función f es simplemente integrable (según Riemann o Lebesgue). No vamos a demostrar este teorema, notemos sólo que para demostrarlo es necesario utilizar las propiedades de las integrales múltiples de Fourier que son análogas a las de las integrales unidimensionales de Fourier (véase el § 4.12, fórmulas (9), (10) y (11)).

Notemos, además, que en la fórmula (21) no se puede sustituir el conjunto (cruz) K_η por el cubo $\Delta_\eta = \{|\,u_j\,| < \eta,\ j = 1, \ldots, n\}$ y en esto consiste la diferencia esencial entre las series de Fourier de las funciones de muchas variables y de las funciones de una variable.

La fórmula (21) puede ser utilizada al obtener distintos criterios suficientes de convergencia de una serie múltiple de Fourier hacia la función $f(x)$ en dependencia de las propiedades de la función $f(x)$.

Capítulo 5

Ecuaciones de la física matemática

§ 5.1. Temperatura de un cuerpo

Examinemos un cuerpo físico Ω. Designemos su temperatura en el punto (x, y, z) en el instante t por

$$u = u(x, y, z, t).$$

Mostremos que la función u satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad ((x, y, z) \in \Omega) \tag{1}$$

o bien, si hacemos uso de la designación

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \tag{1'}$$

que se llama *ecuación de conducción del calor*. La última sirve de ejemplo de una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales de segundo orden.

Examinemos un cubo elemental σ del cuerpo Ω (fig. 119). La cantidad de calor que atraviesa la cara izquierda de σ de derecha a izquierda durante el tiempo $(t, t + \Delta t)$ es igual, con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior, a

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t)\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t.$$

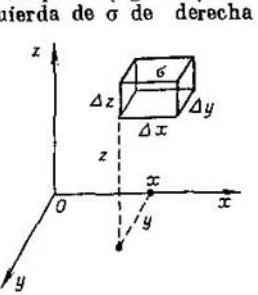

Fig. 119.

Aquí α es el coeficiente de conductibilidad térmica del cuerpo el cual se considera constante en cualquiera de sus puntos. El hecho consiste en que la cantidad indicada de calor es, evidentemente, proporcional al número α, al área $\Delta y \Delta z$ de la cara que se examina, al incremento de tiempo Δt y a la velocidad de variación de la temperatura en la dirección del eje x que es igual a la derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial x}$. La derivada parcial varía dentro de los límites de la cara, pero,

despreciando infinitésimos de orden superior, se puede suponer que ella por doquier en esta cara es igual a $\frac{\partial u}{\partial x}$ en el punto (x, y, z, t).

La cantidad de calor que pasa por la cara derecha de σ de derecha a izquierda es, evidentemente, igual a

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,\ y,\ z,\ t)\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t.$$

La cantidad de calor que entra en el cubo σ por sus caras izquierda y derecha durante el lapso de indicado es igual a

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,\ y,\ z,\ t)\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t - \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x,\ y,\ z,\ t)\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t \sim$$

$$\sim \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ y,\ z,\ t)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t.$$

La cantidad total de calor que entra en σ en el lapso $(t,\ t+\Delta t)$ es, evidentemente, igual a la suma de las cantidades de calor que entran durante este tiempo por todas las caras de σ:

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t. \tag{2}$$

Pero este número (cantidad de calor) es igual también a

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t, \tag{3}$$

donde β es el calor específico del cuerpo que consideramos constante en todos sus puntos.

Igualando las magnitudes de (2) y (3), obtenemos, después de las simplificaciones, la ecuación diferencial (1), donde

$$a^2 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Pues, hemos mostrado que la temperatura del cuerpo Ω es la función $u = u(x, y, z, t)$ que satisface la ecuación (1), donde a^2 es la constante positiva cuyo significado físico ha sido explicado más arriba. Es que nos hemos limitado al caso cuando el cuerpo tiene en todos sus puntos un calor específico constante y un coeficiente de conductibilidad invariable.

La ecuación diferencial (1) tiene un conjunto infinito de soluciones. Para hallar entre ellas una solución determinada es necesario imponer sobre la función u condiciones adicionales. Suelen ser las así llamadas *condiciones iniciales* y *de frontera*.

A continuación examinaremos varios problemas matemáticos relacionados con esta cuestión.

§ 5.2. Problema de Dirichlet

La distribución del calor en un cuerpo se llama *estacionaria* si la temperatura u del cuerpo depende de la posición del punto (x, y, z) y no depende del tiempo t, o sea,

$$u = u(x, y, z).$$

En este caso

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

y la función u satisface la ecuación

$$\Delta u = 0.$$

DEFINICION. La función $u(x, y, z)$ se llama *armónica* sobre la región Ω si tiene derivadas parciales continuas de segundo orden sobre Ω y satisface sobre Ω la ecuación

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

La ecuación (1) se llama *ecuación de Laplace* [1]). Es válido el siguiente

TEOREMA 1. *Supongamos que la región limitada Ω del espacio tiene una frontera suave a trozos (de la superficie) Γ sobre la cual se da la función continua $f(x, y, z)$. Entonces en la clausura $\overline{\Omega}$ existe la única función continua $u(x, y, z)$, armónica sobre Ω, tal que*

$$u|_\Gamma = f(x, y, z).$$

El teorema 1 tiene una interpretación física evidente. Si sobre la frontera Γ del cuerpo Ω se mantiene sin interrupción una temperatura u, igual a $u|_\Gamma = f(x, y, z)$ donde $f(x, y, z)$ es la función continua dada sobre Γ, entonces dentro del cuerpo se establece la temperatura bien determinada (única) $u(x, y, z)$. Desde el punto de vista de la física esta afirmación debe considerarse evidente. Sin embargo, puede ser demostrada asimismo matemáticamente. Este problema, llamado *problema de Dirichlet*, está investigado muy bien; con la particularidad de que, se dan diferentes métodos aproximados de su resolución.

El problema de Dirichlet tiene gran aplicación práctica también en un caso plano. En el caso plano este problema se enuncia así.

Sobre la frontera suave a trozos Γ de una región plana Ω está dada una función continua $f(x, y)$. Es necesario hallar una función $u(x, y)$ que sea continua sobre $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ y armónica sobre Ω, es decir,

[1]) P. S. Laplace (1749—1827), ilustre matemático y físico francés.

que tenga las derivadas parciales segundas continuas y sati faga la ecuación de Laplace sobre Ω:

$$\Delta u = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Este problema se resuelve positivamente: sobre $\overline{\Omega}$ existe, y sólo la única función $u(x, y)$ que satisface los requisitos de esta problema.

Sobre todo son importantes los casos cuando el problema de Dirichlet se resuelve *de manera efectiva.*

A continuación ofrecemos la resolución efectiva del problema de Dirichlet para un círculo.

§ 5.3. Problema de Dirichlet para un círculo

TEOREMA 1. *Sea* σ *un círculo unitario abierto que tiene por centro el origen del sistema rectangular de coordenadas* (x, y) *y sobre su frontera viene dada una función continua* $f(\theta)$ *(de período* 2π*), donde* θ *es el ángulo polar de un punto de* Γ. *Entonces en la clausura* $\overline{\sigma} = \sigma + \Gamma$ *del círculo* σ *existe y sólo la única función* $u(x, y)$ *que sea continua sobre* $\overline{\sigma}$, *armónica sobre* σ *e igual a* $f(\theta)$ *sobre* Γ:

$$u|_\Gamma = f(\theta). \tag{1}$$

En las coordenadas polares (ρ, θ) *la función* $u = u(\rho, \theta)$ *se escribe en la forma de la serie*

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta), \tag{2}$$

donde

$$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \left\{\begin{matrix} \cos k\theta \\ \operatorname{sen} k\theta \end{matrix}\right\} d\theta \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

son los coeficientes de Fourier de la función $f(\theta)$.

Demostremos el teorema 1 suponiendo que la función $f(\theta)$ tiene la derivada segunda continua, aunque el teorema es justo también si $f(\theta)$ es simplemente continua.

Desarrollemos la función $f(\theta)$ en serie de Fourier

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta).$$

Como $f(\theta)$ tiene la derivada segunda continua, entonces

$$|a_k| \leqslant \frac{2M}{k^2}, \quad |b_k| \leqslant \frac{2M}{k^2}, \quad k \neq 0, \tag{3}$$

donde la constante $M = \max\limits_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} |f''(t)|$ (véase el § 4.7). Tenemos $|\rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta)| \leqslant |a_k| + |b_k|$ $(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$, y puesto que la serie

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leqslant \frac{|a_0|}{2} + 4M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

converge, entonces, según el teorema de Weierstrass, la serie (2) converge uniformemente sobre $\overline{\sigma}$. Pero entonces $u(\rho, \theta)$ es una función continua sobre $\overline{\sigma}$, como la suma de la serie uniformemente convergente de las funciones continuas. Además,

$$u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) = f(\theta),$$

o sea, se cumple la propiedad (1).

Cada término de la serie (2) satisface la ecuación de Laplace en coordenadas polares

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0$$

(véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral» § 9.9, ejemplo 3). Además, tienen lugar las igualdades $(0 \leqslant \rho < 1)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\rho^{k-2} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \rho^k (-a_k \cos k\theta - b_k \operatorname{sen} k\theta). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En el caso dado la derivación de la serie (2) término a término es legítima, porque para todo número positivo $\rho_0 < 1$ los términos de las series (4) no superan, respectivamente, el número

$$\rho_0^k k^2 \frac{4M}{k^2} = 4M\rho_0^k \quad (0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0)$$

y la serie

$$4M \sum_{1}^{\infty} \rho_0^k < \infty \quad (0 < \rho_0 < 1)$$

converge.

Por eso la suma de la serie (2) $u(\rho, \theta)$ es la solución del problema planteado (es una función armónica).

El hecho de que la solución del prob ema de Dirichlet sea la única, no vamos a demost arlo.

§ 5.4. Problema de Dirichlet para un semiplano

Supon amos que en el semiplano $R_2^+ = \{-\infty < x < \infty, y > 0\}$ es preciso hallar una solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

que satisfaga la condición de frontera

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{2}$$

Es fácil comprobar que las funciones

$$u_\lambda(x, y) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] \exp(-\lambda y)$$

para todo número fijo $\lambda > 0$ están acotadas y son armónicas sobre R_2^+, o sea, satisfacen sobre R_2 la ecuación (1). Pero entonces la suma de tales funciones, e incluso la integral tomada sobre el parámetro, será asimismo la solución de la ecuación (1):

$$u(x, y) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] \exp(-\lambda y)\, d\lambda \tag{3}$$

con tal de que sea legítima la derivación bajo el signo integral respecto a los parámetros x e y. Las constantes $\alpha(\lambda)$ y $\beta(\lambda)$ las hallamos de la condición (2)

$$u(x, 0) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x]\, d\lambda = \varphi(x). \tag{4}$$

Escribamos el desarrollo de la función $\varphi(x)$ en integral de Fourier

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \xi\lambda\, d\xi \right) \cos \lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \operatorname{sen} \xi\lambda\, d\xi \right) \operatorname{sen} \lambda x \right\} d\lambda. \tag{5}$$

Comparando las fórmulas (4) y (5), vemos que

$$\alpha(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\xi\lambda\,d\xi,\quad \beta(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\operatorname{sen}\xi\lambda\,d\xi. \tag{6}$$

Sustituyendo estas funciones en (3), obtenemos

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(-\lambda y)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\Big]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\Big[\int_{0}^{\infty}\exp(-\lambda y)\cos\lambda(t-x)\,d\lambda\Big]dt.$$

Conforme al § 4.14, ejemplo 4), tenemos

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{y\,dt}{y^2+(t-x)^2}. \tag{3'}$$

Observación 1. Supongamos que la función $\varphi(x)$ tiene derivadas continuas hasta el cuarto orden inclusive y satisface las condiciones

$$\varphi^{(k)}(x)\to 0,\quad x\to\infty\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4);$$

$$M_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi^{(k)}(x)|\,dx<\infty\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Entonces de (6) resultan las estimaciones

$$|\alpha(\lambda)|\leqslant\frac{c}{1+\lambda^4},\quad |\beta(\lambda)|\leqslant\frac{c}{1+\lambda^4}, \tag{7}$$

donde c es cierta constante. En efecto, si $|\lambda|<1$, entonces

$$|\alpha(\lambda)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\xi)|\,d\xi=M_0\leqslant\frac{2M_0}{1+\lambda^4}. \tag{8}$$

Si $|\lambda|\geqslant 1$, entonces, integrando cuatro veces por partes, obtenemos

$$\alpha(\lambda)=\frac{1}{\pi}\varphi(\xi)\frac{\operatorname{sen}\lambda\xi}{\lambda}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(\xi)\operatorname{sen}\xi\lambda\times d\xi=$$

$$=-\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(\xi)\operatorname{sen}\lambda\xi\,d\xi=\ldots=\frac{1}{\pi\lambda^4}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(4)}(\xi)\cos\xi\lambda\,d\xi,$$

de donde

$$|\alpha(\lambda)|\leqslant\frac{M_4}{\lambda^4}\leqslant\frac{2M_4}{1+\lambda^4} \tag{9}$$

De (8) y (9) se deduce la primera desigualdad (7). La segunda desigualdad (7) se demuestra de un modo análogo.

Las estimaciones (7) aseguran la existencia, la continuidad y el carácter acotado de las funciones u, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en el semiplano superior R_2^+.

Observación 2. Se puede demostrar que si la función $\varphi(x)$ es continua y está acotada sobre $(-\infty, \infty)$, entonces la solución del problema de Dirichlet, obtenida con ayuda de la fórmula (3'), para el semiplano superior es la única en la clase de funciones acotadas.

§ 5.5. Ecuación de conducción del calor por una barra

Examinemos una barra fina aislada (revestida con un aislamiento térmico) que se halla sobre el segmento $[0, \pi]$ del eje x (fig. 120). Se supone que sus propiedades físicas son iguales en los puntos de cualquier sección de la misma. Por eso la temperatura de la barra es la función

$$u = u(x, t)$$

de la abscisa x de la sección y del tiempo t.

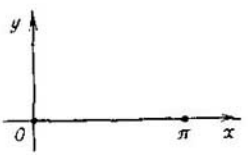

Fig. 120.

En virtud de lo dicho en el § 5.1 la función u satisface la ecuación diferencial en las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

donde $a^2 > 0$ es la constante, si suponemos que la capacidad calorífica y la conducción del calor de la barra no dependen de x.

Planteemos el problema: hallar una función $u(x, t)$, continua para $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, que tenga las derivadas parciales continuas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ para $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ y satisfaga la ecuación diferencial (1) para $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, y las condiciones siguientes:

1) la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi), \tag{2}$$

donde $f(x)$ es la función continua dada sobre el segmento $[0, \pi]$;

2) las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad \forall\ t \geqslant 0. \tag{3}$$

Ahora bien, se supone que en el instante inicial de tiempo $t = 0$ la temperatura de la barra se expresa por la función $f(x)$ (véase (2)) y durante el tiempo de realización del experimento en los extremos

de la barra se mantiene artificialmente la temperatura igual a cero (véase (3)).

Resolvamos la ecuación (1) por el *método de Fourier* de separación de variables. La esencia de este método consiste en buscar soluciones particulares de la ecuación (1), que satisfagan tan sólo las condiciones de frontera (3), en forma del producto de dos funciones cada una de las cuales no depende sino de una variable:

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{4}$$

En este caso buscamos soluciones no triviales, es decir, no iguales idénticamente a cero. De (4) tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t)\frac{d^2X}{dx^2} = TX'', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = XT'.$$

Sustituyendo estas expresiones en (1), obtenemos

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}. \tag{5}$$

En (5) el primer miembro no depende de x y el segundo no depende de t, por eso

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu, \tag{6}$$

donde μ es cierta constante.

Ahora bien, las funciones $X(x)$ y $T(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' + \mu X = 0. \tag{7}$$

$$T' + a^2\mu T = 0, \tag{8}$$

donde μ es cierta constante.

Puesto que buscamos soluciones que satisfagan las condiciones (3), para todos los valores de t deben cumplirse las igualdades

$$u(0, t) = X(0)\, T(t) = 0, \quad u(\pi, t) = X(\pi)\, T(t) = 0.$$

Si suponemos que $T(t) = 0$, $\forall t$, entonces $u(x, t) \equiv 0$ para todos los valores de x y t. Por eso existe al menos un valor de t para el cual $T(t) \neq 0$. Pero entonces

$$X(0) = X(\pi) = 0. \tag{9}$$

Hemos llegado al problema siguiente. Es necesario hallar tales números μ para los cuales la ecuación diferencial (7) tiene una solución no trivial (no igual idénticamente a cero) sobre el segmento $[0, \pi]$ la cual satisfaga las condiciones de frontera (9).

Este problema se llama *problema de Sturm — Liouville* [1]) para

[1]) J. Liouville (1809—1882), matemático francés, J. Ch. F. Sturm (1803—1855), matemático francés.

la ecuación (7) sobre el segmento $[0, \pi]$ a las condiciones de frontera (9). Los números buscados μ se denominan *valores propios* del problema de Sturm — Liouville y las funciones no triviales respectivas que satisfacen las condiciones de frontera (9) se llaman *funciones propias* correspondientes a estos valores.

Busquemos la solución del problema planteado entre los números positivos $\mu = \lambda^2 > 0$ $(\lambda > 0)$. En este caso los números $\pm i\lambda$ son las raíces de la ecuación característica, por eso la solución general de la ecuación (7) se escribirá así:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x.$$

De (9) encontramos

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1, \\ 0 &= C_1 \cos \lambda\pi + C_2 \operatorname{sen} \lambda\pi, \end{aligned}\right\} \text{ o bien } \left.\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_2 \operatorname{sen} \lambda\pi &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Para obtener una solución que no sea igual idénticamente a cero es necesario considerar $C_2 \neq 0$ y $\operatorname{sen} \lambda\pi = 0$. Esto último es posible solamente para los números naturales $\lambda = k = 1, 2, 3, \ldots$. A cada k le corresponde la solución

$$X_k(x) = d_k \operatorname{sen} kx \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

que satisface, evidentemente, las condiciones de frontera (9). Es la solución no trivial (no igual idénticamente a cero) de la ecuación (7). Así, pues, los números

$$\mu_k = k^2 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

son los *valores propios* del problema de frontera mencionado arriba (problema de Sturm — Liouville) y las funciones

$$X_k = d_k \operatorname{sen} kx \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

para $d_k \neq 0$ son las *funciones propias* correspondientes a estos valores.

Hemos hallado todos los valores propios y las funciones propias del problema planteado de Sturm — Liouville, por cuanto, cualquiera que sea $\mu \leqslant 0$, la ecuación diferencial (7) tiene sólo la solución trivial (igual idénticamente a cero) que satisface las condiciones $X(0) = X(\pi) = 0$.

En efecto, cuando $\mu = -\lambda^2 < 0$ la solución general de la ecuación (7) tiene la forma $X = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$. Hallemos las constantes C_1 y C_2 de la condición (9):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= C_1 e^{\lambda\pi} + C_2 e^{-\lambda\pi} \end{aligned}\right\}$$

El determinante de este sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\pi} & e^{-\lambda\pi} \end{vmatrix} = e^{-\lambda\pi} - e^{\lambda\pi} \neq 0,$$

por eso el sistema tiene solamente la solución trivial $C_1 = C_2 = 0$. Así, pues, para $\mu = -\lambda^2 < 0$ no existe una solución particular de la ecuación (7) que no sea igual idénticamente a cero y satisfaga las condiciones (9).

Si $\mu = 0$, la ecuación característica tendrá el número cero como raíz múltiple, por eso la solución general (7) se escribirá así:

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, obtenemos $C_1 = 0$, $C_1 + C_2\pi = 0$, de donde $C_1 = C_2 = 0$ y $X(x) \equiv 0$.

Queda resolver la ecuación (8) para $\mu_k = k^2$ hallados:

$$T' + a^2k^2T = 0, \quad \frac{dT}{T} = -a^2k^2\,dt, \quad T(t) = A_k \exp(-a^2k^2t),$$

donde A_k es la constante arbitraria.

Así, pues,

$$u_k(x, t) = b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx \quad (b_k = A_k d_k) \tag{10}$$

son las soluciones particulares de la ecuación (1) que satisfacen las condiciones de contorno (3).

Es fácil ver que la suma finita arbitraria

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx,$$

donde b_k son las constantes arbitrarias que, a su vez, son la solución de la ecuación diferencial (1) la cual satisface las condiciones de frontera $u_N(0, t) = u_N(\pi, t) = 0$. Pero entonces la suma de la serie infinita

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx \tag{11}$$

también satisfará la ecuación (1) y las condiciones de frontera $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ siempre que los coeficientes b_k sean suficientemente pequeños.

Escojamos ahora los números b_k de modo que se cumpla la igualdad

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi). \tag{12}$$

Los números b_k se seleccionan de un modo único, a saber, por la fórmula

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\,dt,$$

o sea, deben ser coeficientes de Fourier de la función f (véase el § 4.3).

Si la función $f(x)$ es continua sobre $[0, \pi]$, entonces la serie (12) converge hacia ella en media cuadrática sobre $[0, \pi]$ (véase el § 4.10, teorema 2). Si resulta que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$$

converge, entonces debido a las desigualdades

$$|b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx| \leqslant |b_k| \tag{13}$$

la serie (11) converge uniformemente y su suma será la función continua para $t \geqslant 0$.

Cuando $t > 0$, la serie (11) converge con gran rapidez: ésta puede ser derivada término a término tantas veces como se quiera. En particular,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

de donde se ve que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La legitimidad de las igualdades (14), es decir, de la derivabilidad de la serie (11) término a término para $t > 0$ se puede examinar del modo siguiente. Si se da $t > 0$, tomemos t_0 de modo que $0 < t_0 < t$. Entonces, por ejemplo, si se trata de la primera serie (14), suponiendo que $|b_k| \leqslant M$, tendremos

$$|k^2 b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx| \leqslant Mk^2 \exp(-a^2k^2t_0).$$

Pero la serie formada de los números positivos (¡constantes!)

$$M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp(-a^2k^2t_0) < \infty$$

converge (lo que se puede comprobar por el criterio de d'Alembert o el de Cauchy) y esto junto con la estimación (13) muestra que la derivación realizada dos veces término a término respecto a x es legítima.

Observación. Anteriormente hemos obtenido que el problema de Sturm — Liouville

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0 \tag{15}$$

tiene los valores propios

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 4, \quad \mu_3 = 9, \quad \ldots, \quad \mu_k = k^2, \quad \ldots. \tag{16}$$

Estos valores son positivos y les corresponden las funciones propias

$$\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen} 2x, \quad \operatorname{sen} 3x, \quad \ldots, \quad \operatorname{sen} kx, \quad \ldots \tag{17}$$

que forman el sistema ortogonal sobre el segmento $[0, \pi]$:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} lx \, dx = 0 \quad (k \neq l).$$

De la teoría de las series trigonométricas se sabe que el sistema (17) es completo en $L_2'(0, \pi)$ (véase el § 4.10, teorema 2), es decir, la serie de Fourier de una función arbitraria, suave a trozos sobre el segmento $[0, \pi]$, según este sistema converge hacia ella en media cuadrática.

El lector puede encontrar en el § 5.10 algunas nociones que generalizan estos hechos.

§ 5.6. Conducción del calor para una barra infinita

Conforme al § 5.5 la temperatura $u(x, y)$ del punto x de una barra en el instante t satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Veamos una barra infinita ($-\infty < x < \infty$). Las condiciones de contorno en este caso no son de rigor, por eso buscaremos una solución acotada de la ecuación (1) que satisfaga sólo la condición inicial

$$u|_{t=0} = u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

donde la función $\varphi(x)$ está definida sobre todo el eje real. Supondremos que la función φ es continua y pertenece a $L'(-\infty, \infty)$. Este problema se denomina *problema de Cauchy* para la ecuación (1).

Para simplificar la notación a continuación supondremos $a = 1$.

Para resolver el problema planteado apliquemos el método de separación de variables que lleva el nombre de Fourier. Buscaremos la solución particular en la forma

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Sustituyendo esta función en (1), obtenemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \mu,$$

$$T' = \mu T, \tag{3}$$

$$X'' = \mu X. \tag{4}$$

La solución de la ecuación (3) tiene la forma

$$T(t) = C \exp(\mu t).$$

Teniendo en cuenta las consideraciones físicas, está claro que la temperatura $u(x, t) = X(x)\, T(t)$ no puede crecer indefinidamente cuando $t \to \infty$. Esto quiere decir que la constante μ debe ser negativa. Pongamos $\mu = -\lambda^2$. Entonces la solución de la ecuación (4) será la siguiente:

$$X(x) = A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x.$$

La función

$$u_\lambda(x, t) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] \exp(-\lambda^2 t) \tag{5}$$

es una solución particular de la ecuación (1) para $\forall \lambda$. Pero entonces la suma de tales soluciones, e incluso la integral de la función (5) respecto al parámetro λ, será asimismo solución de la ecuación (1):

$$u(x, t) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] \exp(-t^2 \lambda)\, d\lambda. \tag{6}$$

Naturalmente, las funciones $\alpha(\lambda)$ y $\beta(\lambda)$ deben decrecer con bastante rapidez hacia cero para que sea legítimo derivar (6) respecto a los parámetros x y t. Las funciones $\alpha(\lambda)$ y $\beta(\lambda)$ se determinan a partir de la condición inicial

$$u(x, 0) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x]\, d\lambda = \varphi(x). \tag{7}$$

Escribamos el desarrollo de la función φ en integral de Fourier (véase el § 4.13, (1)):

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \xi\lambda\, d\xi \right) \cos \lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \operatorname{sen} \lambda\xi\, d\xi \right) \operatorname{sen} \lambda x \right\} d\lambda. \tag{8}$$

Comparando las fórmulas (7) y (8) vemos que

$$\alpha(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\xi\lambda\,d\xi,\quad \beta(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\operatorname{sen}\xi\lambda\,d\xi. \tag{9}$$

Sustituyendo estos valores en (6), obtenemos (véase el § 4.14, (12))

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi\right]\exp(-\lambda^2 t)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+\xi)\left[\int_0^{\infty}\exp(-\lambda^2 t)\cos\lambda\xi\,d\lambda\right]d\xi=$$

$$=\left(\lambda=\frac{z}{\sqrt{t}}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+\xi)\left[\int_0^{\infty}\exp(-z^2)\cos\frac{\xi z}{\sqrt{t}}\,\frac{dz}{\sqrt{t}}\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+\xi)\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi+x)\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)d\xi. \tag{10}$$

Así, el problema (1), (2) queda resuelto por completo.

Observación 1. Si la función φ satisface las condiciones señaladas en la observación 1 del § 5.4, entonces la solución del problema de Cauchy obtenida mediante la fórmula (10) será continua y acotada junto con sus derivadas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ y será solución única en esta clase de funciones acotadas.

§ 5.7. Vibraciones pequeñas de una cuerda

Se llama *cuerda* un hilo fino que resiste a la tracción y no resiste a la flexión. Si una cuerda floja se somete al arrugamiento, no opondrá ninguna resistencia; sin embargo, si se estira, en ella surgirán tensiones.

Supongamos que los extremos de un trozo de cuerda tensa están sujetos en los puntos $x = a$ y $x = b$ del eje x. Supongamos también que la magnitud de la tensión que surge en ella es igual a T. Supondremos luego que la densidad de la cuerda en toda su extensión es igual a ρ. Hagamos salir del equilibrio nuestra cuerda en el instante $t = 0$, por ejemplo, tirémosla con el dedo hacia un lado y

dejemos que vibre (oscile) libremente efectuando pequeñas vibraciones.

En el instante t designaremos la desviación de la cuerda en un punto cualquiera de la misma cuya abscisa es x por

$$u = u(x, t) \quad (a \leqslant x \leqslant b, \ t \geqslant 0).$$

Escribamos la ecuación diferencial a la cual satisface la función u. La fig. 121 muestra el gráfico de nuestra cuerda en el instante t.

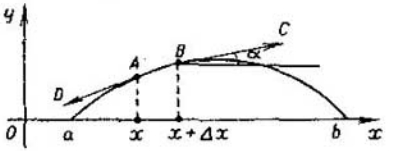

Fig. 121.

El elemento de éste correspondiente al segmento $[x, \ x + \Delta x]$ está sometido a la acción de dos fuerzas de tensión $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$. La magnitud escalar de cada una de estas fuerzas es igual a T:

$$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = T.$$

La fuerza $\overrightarrow{BC}$ está aplicada al punto B, que tiene por abscisa $x + \Delta x$, está orientada por la recta tangente a la cuerda en este punto y forma con el sentido positivo del eje x el ángulo α cuya tangente es igual a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u(x+\Delta x, \ t)}{\partial x}.$$

Puesto que la cuerda realiza vibraciones pequeñas, se puede considerar, aproximadamente,

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \operatorname{sen} \alpha.$$

Ahora bien,

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \frac{\partial u(x+\Delta x, \ t)}{\partial x}.$$

La proyección de la fuerza $\overrightarrow{BC}$ sobre el eje u es, evidentemente, igual a

$$T \operatorname{sen} \alpha \approx T \frac{\partial u(x+\Delta x, \ t)}{\partial x}.$$

La proyección de la fuerza $\overrightarrow{AD}$ sobre el eje u es, evidentemente, igual a

$$-T \frac{\partial u(x, \ t)}{\partial x}.$$

La suma de estas proyecciones es igual a

$$T\,\frac{\partial u\,(x\,+\Delta x,\ t)}{\partial x}-T\,\frac{\partial u\,(x,\ t)}{\partial x}\approx T\,\frac{\partial^2 u\,(x,\ t)}{\partial x^2}\,\Delta x.$$

Despreciamos siempre los infinitésimos de un orden superior al de Δx, puesto que examinamos, por decirlo así, las pequeñas vibraciones de la cuerda.

Por otro lado, el producto de la masa por la aceleración del elemento de la cuerda que examinamos es igual a

$$\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u\,(x,\ t)}{\partial t^2}.$$

Por eso

$$\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x.$$

Al simplificar por Δx, obtenemos para la cuerda la ecuación diferencial de su vibración:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad\left(a^2=\frac{T}{\rho}\right). \tag{1}$$

Ahora el problema matemático al cual conduce el estudio de las vibraciones libres de la cuerda se puede enunciar así: es preciso resolver una ecuación diferencial lineal con derivadas parciales de segundo orden (1) para las condiciones iniciales

$$u\,(x,\ 0)=f\,(x),\quad\frac{\partial u\,(x,\ 0)}{\partial t}=F\,(x) \tag{2}$$

y para las condiciones de contorno

$$u\,(0,\ t)\ =\ u\,(\pi,\ t)\ =\ 0. \tag{3}$$

Las condiciones iniciales (2) muestran en qué posición se encontraba la cuerda en el instante inicial de tiempo y cuál era la velocidad de cada uno de sus puntos para el instante $t\ =\ 0$. Las funciones dadas son $f\,(x)$ y $F\,(x)$.

Las condiciones de contorno (3) muestran que los extremos de la cuerda están sujetos en los puntos $a\ =\ 0$ y $b\ =\ \pi$.

El problema planteado puede ser resuelto por el método de Fourier (al igual que en el § 5.5). Buscamos primeramente la solución de la ecuación (1) en forma del producto

$$u\,(x,\ t)\ =\ X\,(x)\ T\,(t) \tag{4}$$

que satisface las condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned}X\,(0)\ T\,(t)\ &=\ 0,\\ X\,(\pi)\ T\,(t)\ &=\ 0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

para todos los valores de $t > 0$. Pero entonces

$$X(0) = X(\pi) = 0,$$

porque de otro modo sería $T(t) \equiv 0$ y $u(x, t) \equiv 0$. Sustituyendo el producto (4) en (1), obtenemos

$$XT'' = a^2 X''T$$

o bien

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Pero la función de t puede ser igual a la de x sólo si ambas son iguales al número constante que designaremos por $-\mu$:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu.$$

Como resultado obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{6}$$

$$T'' + a^2 \mu T = 0. \tag{7}$$

La ecuación (6) debe resolverse para las condiciones de contorno $X(0) = X(\pi) = 0$, o sea, es necesario resolver para esta ecuación el problema de Sturm — Liouville (véase el § 5.5). Como muestra el § 5.5, los números (valores propios)

$$\mu_k = k^2 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

y las funciones no triviales (funciones propias) que les corresponden

$$X_k(x) = \operatorname{sen} kx \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

y que satisfacen con estos números las condiciones de (5) son la solución de este problema.

Para los valores hallados de $\mu_k = k^2$ la solución general de la ecuación (7) tiene la forma

$$T_k(t) = A_k \cos akt + B_k \operatorname{sen} akt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación diferencial (1) que tienen la forma (4) y satisfacen las condiciones de frontera (5) se pueden escribir así:

$$u_k(x, t) = (A_k \cos akt + B_k \operatorname{sen} akt) \operatorname{sen} kx \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

donde las constantes A_k y B_k para cada k pueden tomarse arbitrariamente. Pero entonces cualesquiera sumas

$$\sum_{k=1}^{N} (A_k \cos akt + B_k \operatorname{sen} akt) \operatorname{sen} kx$$

son asimismo las soluciones de la ecuación (1) que satisfacen las condiciones de frontera (5). Junto con estas sumas poseen dicha propiedad también las sumas de las series infinitas

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos akt+B_k\operatorname{sen} akt)\operatorname{sen} kx \tag{8}$$

si los números A_k y B_k con suficiente rapidez tienden a cero para que estas series se puedan derivar término a término dos veces.

Ahora a nuestra disposición tenemos una gran reserva de funciones $u(x,\ t)$ que satisfacen la ecuación (1) y las condiciones de frontera (3): se determinan por la fórmula (8), donde A_k y B_k son números arbitrarios, con tal de que se cumplan las condiciones indicadas de convergencia.

Para hallar una solución del problema planteado que satisfaga las condiciones iniciales (2) vamos a derivar (8) respecto a t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}ak(-A_k\operatorname{sen} akt+B_k\cos akt)\operatorname{sen} kx \tag{9}$$

e igualamos (8) y (9), para $t=0$, a las funciones dadas $f(x)$ y $F(x)$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\operatorname{sen} kx,\quad F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}akB_k\operatorname{sen} kx. \tag{10}$$

De aquí

$$A_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\operatorname{sen} kt\,dt,\quad B_k=\frac{2}{\pi ak}\int_0^{\pi}F(t)\operatorname{sen} kt\,dt. \tag{11}$$

Si las funciones $f(x)$ y $F(x)$ son continuas sobre $[0,\ \pi]$, esto será suficiente para que se puedan calcular los números A_k y B_k por las fórmulas (11) y las series (10) converjan hacia estas funciones en media cuadrática en todo caso (véase el § 4.10). Desde luego, si no sólo son continuas las funciones $f(x)$ y $F(x)$ sino también sus derivadas (bastan las de tercer orden), entonces la suma de la serie (8) tendrá, a ciencia cierta, las derivadas segundas continuas.

§ 5.8. Vibraciones de una cuerda infinita. Fórmula de d'Alembert

Si la cuerda es muy larga, los extremos de la misma ejercerán poca influencia sobre las vibraciones que surgen en alguna parte próxima al centro.

Por eso, examinando las vibraciones libres de una cuerda infinita, debemos resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

sólo para las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \tag{2}$$

$$u'_t(x, 0) = F(x). \tag{3}$$

Tal problema se llama *problema de Cauchy* o *problema con condiciones iniciales*.

Es cómodo resolverlo del modo siguiente. Introduzcamos las nuevas variables

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \tag{4}$$

Entonces (1) se convierte en ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0. \tag{5}$$

La función

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

donde φ y ψ son las funciones arbitrarias que consideraremos dos veces derivables, es, evidentemente, la solución de la ecuación (5).

Retornando a las variables anteriores, obtenemos la solución de la ecuación (1) en la forma siguiente:

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \tag{6}$$

Por derivación inmediata de (6) es fácil convencerse de que es precisamente así. Tenemos

$$u'_x = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at),$$

$$u'_t = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at),$$

$$u''_{xx} = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at),$$

$$u''_{tt} = a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at),$$

es decir,

$$a^2 u''_{xx} = u''_{tt}.$$

La solución obtenida (6) que depende de dos funciones arbitrarias se denomina *solución de d'Alembert* [1]).

Utilizando las condiciones iniciales, hallemos las funciones φ y ψ:

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x), \tag{7}$$

$$-a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x). \tag{8}$$

[1]) J. d'Alembert (1717—1783), ilustre matemático francés.

Integrando (8) sobre el segmento $[0, x]$, obtenemos

$$-\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{a}\int_0^x F(y)\,dy+C, \tag{9}$$

donde C es la constante arbitraria. De (7) y (9) obtenemos

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x F(y)\,dy-\frac{C}{2},\\ \psi(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x F(y)\,dy+\frac{C}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ahora la solución del problema de Cauchy se escribirá así:

$$u(x,\ t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)=$$

$$=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}F(y)\,dy+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}F(y)\,dy,$$

o bien

$$u(x,\ t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)\,dy. \tag{11}$$

La fórmula (11) se denomina *fórmula de d'Alembert*.

§ 5.9. Vibración de una membrana circular

Supongamos que una membrana circular de radio 1 ocupa en el estado de reposo un círculo de radio 1 que tiene por centro el origen del sistema polar de coordenadas (r, φ) (fig. 122). Supongamos también que la membrana se encuentra sujeta por una circunferencia de $r = 1$. Si actuamos sobre la membrana con cierta fuerza, la desviación de los puntos de la membrana u será función de las coordenadas r, φ y del tiempo t:

$$u = u(r,\ \varphi,\ t).$$

Al igual que en el § 5.7, se puede obtener la ecuación de vibraciones de esta cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right). \tag{1}$$

Para la ecuación (1) resolveremos el problema con la condición de contorno

$$u|_{r=l} = 0 \tag{2}$$

y las condiciones iniciales

$$u\Big|_{t=0} = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(r). \tag{3}$$

Ahora bien, examinemos la vibración de eje de simetría de la membrana a la cual todos los puntos de la circunferencia de radio $r \leqslant 1$, que tiene por centro el origen de coordenadas, poseen en el instante inicial la velocidad y las desviaciones independientes del ángulo φ. Así, pues, la función u dependerá sólo de r y t y la ecuación (1) se simplifica:

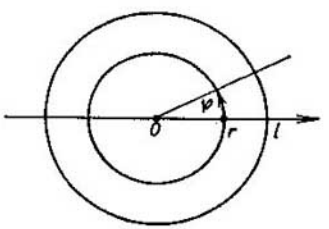

Fig. 122.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \tag{4}$$

La solución de la ecuación (4) con las condiciones (2) y (3) se puede hallar haciendo uso del método de Fourier. Buscamos primero todas las soluciones que tienen la forma

$$u(r, t) = U(r)\, T(t).$$

Es fácil mostrar (al igual que en el § 5.7) que las funciones $T(t)$ y $U(r)$ satisfacen las ecuaciones

$$T'' + \mu^2 a^2 T = 0, \tag{5}$$

$$U'' + \frac{1}{r} U' + \mu^2 U = 0. \tag{6}$$

Ahora bien, es necesario hallar los números μ para los cuales la ecuación (6) tiene una solución no trivial $U(r)$ que satisfaga la condición de frontera

$$U(1) = 0. \tag{7}$$

Estos números μ se llaman *valores propios* del problema dado de Sturm — Liouville y las funciones $U(r)$ que les pertenecen se denominan *funciones propias*.

Observación 1. En el § 5.7 se examinaba el problema de Sturm — Liouville para la ecuación diferencial de segundo orden con dos condiciones de frontera ($X(0) = X(\pi) = 0$). En el problema dado, asimismo para la ecuación de segundo orden, figura una sola condición de frontera ($U(1) = 0$). Esto tiene lugar porque la ecuación

dada dispone de una singularidad en el punto $r = 0$ merced a la cual esta ecuación tiene, junto con las soluciones acotadas, otras no acotadas. De hecho en el caso dado también se buscan funciones propias que satisfagan dos condiciones de frontera: la primera condición que dice que la función propia $U(r)$ debe estar acotada en el entorno $r = 0$ y la segunda condición, $U(1) = 0$.

Para obtener la solución de la ecuación (6) introduzcamos la nueva variable

$$\rho = r\mu, \quad V(\rho) = U(\rho/\mu).$$

Entonces la ecuación (6) se transforma en ecuación igual, pero para $\mu = 1$:

$$V''(\rho) + \frac{1}{\rho} V'(\rho) + V(\rho) = 0. \tag{8}$$

Ya hemos estudiado la ecuación (8) en el § 1.24, ejemplo 2. Tiene dos soluciones linealmente independientes una de las cuales es no acotada en el entorno del punto $\rho = 0$, mientras que otra es la función de Bessel de orden nulo

$$J_0(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho^{2k}}{2^{2k} (k!)^2},$$

donde la serie de potencias a la derecha converge sobre el intervalo $-\infty < \rho < \infty$. Todas las posibles soluciones de la ecuación (8) acotadas en el entorno del punto nulo tienen la forma $CJ_0(\rho)$, donde C es la constante arbitraria (véase la observación 1 del § 1.24). Las funciones respectivas

$$CJ_0(r\mu)$$

serán precisamente las soluciones necesarias de la ecuación (6), acotadas sobre $[0, 1]$.

Ahora queda escoger μ de modo que se cumpla la condición de frontera

$$J_0(1 \cdot \mu) = 0.$$

Vemos que el número μ debe ser la raíz de la función $J_0(r)$. Es bien noto que la función $J_0(r)$ tiene un número infinito de ceros: $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$. Por ejemplo,

$$\mu_1 = 2{,}40; \quad \mu_2 = 5{,}52; \quad \ldots.$$

Así, pues, los números μ_k ($k = 1, 2, \ldots$) son los valores propios a los cuales pertenecen $J_0(\mu_k r)$, que son funciones propias de nuestro problema de contorno. Estas funciones se pueden multiplicar por

las constantes arbitrarias $c_k \neq 0$ y volver a obtener las funciones propias

$$c_k J_0(\mu_k r) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

pertenecientes a los números μ_k.

Cuando $\mu = \mu_k$, la solución de la ecuación (5) se escribirá como sigue:

$$T_k(t) = a_k \cos \mu_k a t + b_k \operatorname{sen} \mu_k a t.$$

Las correspondientes soluciones de la ecuación en derivadas parciales (4), que satisfacen la condición de frontera (2), tienen la forma

$$u_k(r, t) = (a_k \cos \mu_k a t + b_k \operatorname{sen} \mu_k a t) J_0(\mu_k r),$$

donde a_k y b_k son las constantes arbitrarias. Pero entonces la suma de la serie infinita

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k a t + b_k \operatorname{sen} \mu_k a t) J_0(\mu_k r) \tag{9}$$

es asimismo la solución de la ecuación (4), solución que satisface la condición de frontera (2) si, naturalmente, los números a_k y b_k tienden a cero con suficiente rapidez para que estas series se puedan derivar dos veces término a término.

Para hallar la solución del problema planteado, calculamos los coeficientes a_k y b_k a partir de las condiciones iniciales (3):

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r) = f(r), \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a \mu_k b_k J_0(\mu_k r) = F(r). \tag{11}$$

Las funciones de Bessel $J_0(\mu_k r)$ poseen propiedades semejantes a las de las funciones trigonométricas. Así, si la función $f(r)$ es suave a trozos sobre $[0, 1]$, entonces ésta se desarrollará obligatoriamente en una serie que tiene la forma (10) (con coeficientes constantes a_k), serie que siempre converge hacia aquélla en media cuadrática (véase también el § 5.10).

Sabemos que las funciones trigonométricas son ortogonales sobre $[0, 2\pi]$. Las funciones de Bessel $J_0(\mu_k x)$ también lo son sobre $[0, 1]$, pero, como se dice, con el peso x:

$$\int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_l x)\, dx = 0 \quad (k \neq l) \tag{12}$$

De aquí, como demostraremos a continuación, resulta que en las igualdades (10) y (11) los números a_k y b_k se calculan necesariamente por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{\int_0^1 xJ_0(\mu_k x) f(x)\,dx}{\int_0^1 x[J_0(\mu_k x)]^2\,dx}, \\ a\mu_k b_k &= \frac{\int_0^1 xJ_0(\mu_k x) F(x)\,dx}{\int_0^1 x[J_0(\mu_k x)]^2\,dx} \\ &(k=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

El sistema de las funciones

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots \tag{14}$$

continuas sobre el segmento $[a,\ b]$ se llama *ortogonal sobre* $[a,\ b]$ *con el peso* $\rho(x) \geqslant 0$, donde $\rho(x)$ es la función continua, si se cumplen las igualdades

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx = 0 \quad (k \neq l). \tag{15}$$

Si la función $f(x)$ está desarrollada en serie uniformemente convergente sobre $[a,\ b]$ según las funciones $\varphi_k(x)$ del sistema (14):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x), \tag{16}$$

entonces

$$c_m = \frac{\int_a^b \rho(x)\varphi_m(x) f(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)[\varphi_m(x)]^2\,dx} \quad (m=1,\ 2,\ \ldots). \tag{17}$$

En efecto, después de multiplicar la serie por $\rho(x)\varphi_m(x)$ su convergencia uniforme no se altera y la integración término a tér-

mino sobre $[a, b]$, en virtud de las propiedades de (15), conduce a la igualdad

$$\int_a^b \rho(x)\,\varphi_m(x)\,f(x)\,dx = c_m \int_a^b \rho(x)\,[\varphi_m(x)]^2\,dx$$

$$(m = 1, 2, \ldots),$$

de donde obtenemos precisamente las fórmulas (17).

Demostremos (12). La función $J_0(\mu_k x)$ satisface la ecuación

$$\frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_k x) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) + \mu_k^2 J_0(\mu_k x) = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Multiplicando la ecuación provista del índice k por $xJ_0(\mu_n x)$ y una ecuación análoga provista del índice n por $xJ_0(\mu_k x)$ y restando una de la otra, obtenemos

$$x\left[J_0(\mu_n x)\frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x)\frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_n x)\right] +$$

$$+\left[J_0(\mu_n x)\frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x)\frac{d}{dx} J_0(\mu_n x)\right] +$$

$$+ (\mu_k^2 - \mu_n^2)\, x J_0(\mu_k x)\, J_0(\mu_n x) = 0.$$

Es fácil comprobar que esta ecuación puede ser representada en la forma

$$\frac{d}{dx}\left\{x\left[J_0(\mu_n x)\frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x)\frac{d}{dx} J_0(\mu_n x)\right]\right\} +$$

$$+ (\mu_k^2 - \mu_n^2)\, x J_0(\mu_k x)\, J_0(\mu_n x) = 0.$$

Integrando esta igualdad respecto a x entre los límites de 0 a 1, obtenemos

$$(\mu_k^2 - \mu_n^2)\int_0^1 x J_0(\mu_k x)\, J_0(\mu_n x)\,dx = 0 \quad (k \neq n),$$

ya que la integral del primer sumando es igual a cero en virtud de que $J_0(\mu_k) = J_0(\mu_n) = 0$.

§ 5.10. Problema general de Sturm—Liouville

Examinemos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [\lambda\rho(x) - q(x)]\,y(x) = 0, \qquad (1)$$

donde $p(x)$ es la función continuamente derivable sobre el segmento $[0, l]$ y $\rho(x)$, $q(x)$ son las funciones continuas sobre este segmento. Además $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$ y $q(x) \geqslant 0$ sobre $[0, l]$; λ es un número constante.

Planteemos el problema (de Sturm — Liouville). Es preciso hallar todos los números λ (*valores propios*) para los cuales existe una solución no trivial dos veces continuamente derivable $y(x)$ de la ecuación (1), solución (*función propia*) que satisfaga las condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} \alpha y(0) + \beta y'(0) &= 0, \\ \gamma y(l) + \delta y'(l) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

donde α, β, γ y δ son los números constantes.

Se puede demostrar que:

1) existe un conjunto numerable de valores propios del problema

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \quad (\lambda_n \to \infty)$$

a los cuales corresponden las funciones propias

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ \ldots.$$

2) Cuando $q(x) \geqslant 0$, todos los valores propios λ_n son positivos.

3) Las funciones propias forman sobre el segmento $[0, l]$ un sistema ortogonal y normalizado con el peso $\rho(x)$:

$$\int_0^l \rho(x)\, y_m(x)\, y_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

4) TEOREMA DE STEKLOV. Toda función $f(x)$ que satisfaga las condiciones de contorno (2) y tenga continua la derivada primera y continua a trozos la derivada segunda se desarrolla en una serie absoluta y uniformemente convergente según las funciones propias $y_n(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \int_0^l \rho(x)\, y_n(x)\, f(x)\, dx.$$

PROBLEMA 1. Resolver la ecuación de vibraciones libres de una cuerda si el medio opone una resistencia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

para las condiciones iniciales y de frontera

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Durante la resolución se supone que el coeficiente de rozamiento m es pequeño $(m < a)$.

RESPUESTA.

$$u(x,\ t) = e^{-mt} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos q_k t + b_k \operatorname{sen} q_k t) \operatorname{sen} kx,$$

donde

$$q_k = \sqrt{(ka)^2 - m^2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi q_k} \int_0^{\pi} F(x) \operatorname{sen} kx\, dx + \frac{m a_k}{q_k}.$$

PROBLEMA 2. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

para las condiciones

$$\frac{\partial u(0,\ t)}{\partial x} = 0,\quad u(\pi,\ t) = u_0,\quad u(x,\ 0) = \varphi(x).$$

RESPUESTA.

$$u(x,\ t) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \cos \lambda_k x,$$

donde

$$\lambda_k = \frac{2k+1}{2},\quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos \lambda_k x\, dx - \frac{2u_0}{\pi \lambda_k}.$$

Indicación. Es necesario obtener la solución en forma de $u = u_0 + v(x, t)$, donde $v(x, t)$ es la función incógnita.

PROBLEMA 3. Demostrar la propiedad 3) de ortogonalidad de las funciones propias sobre $[0, l]$ que satisfacen las condiciones de frontera (2).

Indicación. Conviene seguir el esquema de demostración de la ortogonalidad de las funciones de Bessel (véase el § 5.9).

PROBLEMA 4. Reducir la ecuación (de Chébishev)

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0 \tag{3}$$

a la forma de (1) sobre $[-1, 1]$.

Indicación. Multiplicar el primero y segundo miembros de la ecuación (3) por $\rho(x) > 0$ y hallar la función $\rho(x)$ partiendo de la condición

$$-x\rho(x) = [(1-x^2)\rho(x)]' \quad (\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}).$$

PROBLEMA 5. Hallar la función ponderal $\rho(x)$ para la ecuación (de Chébishev — Laguerre)

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

RESPUESTA. $\rho(x) = \exp(-x)$, $0 \leqslant x < \infty$.

§ 5.11. Integral de energía (de Dirichlet)

Supongamos que en el espacio (x, y, z) tenemos dado un contorno cerrado Γ' suficientemente suave, definido en la forma paramétrica por las ecuaciones

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s),$$
$$z = \chi(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant l). \qquad (1)$$

Designemos la proyección de Γ' sobre el plano (x, y)

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s) \qquad (2)$$

por Γ. Supondremos que Γ' se proyecta sobre el plano (x, y) biunívocamente, o sea, el contorno Γ es autodisjunto y limita cierta región Ω del plano (x, y) (fig. 123).

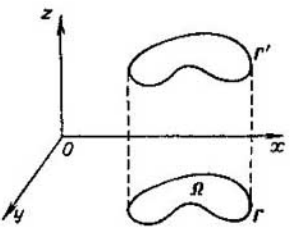

Fig. 123.

Supongamos que Γ' lleva tendida una membrana, es decir, una película que resiste a la tracción y no resiste a la flexión. Es necesario hallar su ecuación

$$z = u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \qquad (3)$$

El borde de la membrana está sujeto sobre Γ' y por eso la función $u(x, y)$ satisface la condición de frontera

$$u|_\Gamma = \chi(s) = u(\varphi(s), \psi(s)), \quad 0 \leqslant s \leqslant l. \qquad (4)$$

Se puede demostrar que la energía potencial de la membrana, con una precisión hasta el factor que caracteriza sus propiedades físicas, se expresa por la integral múltiple (doble)

$$D[u] = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \qquad (5)$$

la cual se llama *integral de Dirichlet* de la función $u(x, y)$.

Si con ayuda de las fuerzas externas damos a la membrana una forma distinta

$$z = v(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

dejándola sujeta en Γ', entonces su energía será igual a

$$D[v] = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy \qquad (5')$$

y ella misma, como antes, satisfará las condiciones de frontera

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = \chi(s) = v[\varphi(s), \psi(s)] \quad (0 \leqslant s \leqslant l). \qquad (4')$$

En este estado se encontrará todavía más tensa, por lo que $D[v] \geqslant D[u]$.

Por consiguiente, $u(x, y)$ puede definirse como una función cuya integral de Dirichlet se convierte en mínimo entre las integrales de energía para todas las funciones indicadas v:

$$D[u] = \min_{v|_{\Gamma} = \chi(s)} D[v]. \qquad (6)$$

Introduzcamos la clase W de funciones $v(x, y)$ que tengan las derivadas parciales continuas sobre $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ y satisfagan las mismas condiciones de frontera que u:

$$v|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}.$$

Existe un conjunto infinito de funciones v pertenecientes a la clase W. Una de ellas es la función buscada $u(x, y)$ que convierte $D[v]$ en mínimo entre todos los valores de $v \in W$:

$$D[u] = \min_{v \in W} D[v]. \qquad (7)$$

Notemos que si a toda función f de la clase de funciones E ($f \in E$) se le hace corresponder, en virtud de cierta ley, el número $F(f)$, entonces se dice que $F(f)$ es la *funcional* definida sobre la clase de las funciones E.

La integral de Dirichlet $D[v]$ es un ejemplo de la funcional definida sobre la clase de funciones W.

Para las funcionales, al igual que para las funciones habituales, se puede examinar la teoría de los extremos llamada *cálculo de variaciones*. Se denomina *incremento* o *variación del argumento de la funcional* $F(f)$ la diferencia entre dos funciones pertenecientes a la clase E:

$$\delta f = f(x) - f_1(x).$$

Por analogía con el concepto de diferencial de una función

$$df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha \Delta x) \Delta x|_{\alpha=0} = f'(x)\, \Delta x$$

(donde α es un número real arbitrario) se puede introducir el concepto de *variación de una funcional*

$$\delta F = \frac{\partial}{\partial \alpha} F(f(x) + \alpha \delta f)|_{\alpha=0}.$$

Se dice que la funcional $F(f)$ *alcanza el mínimo (el máximo)* sobre la función $f_0(x)$ si $F(f) \geqslant F(f)$ $(F(f) \leqslant F(f_0))$. Tiene lugar la afirmación: *si una funcional que tiene la variación δF alcanza el mínimo (máximo) sobre la función $f = f_0$, entonces*

$$\delta F(f_0) = 0.$$

En efecto, para $f_0(x)$ y δf fijas la funcional $F(f_0(x) + \alpha \delta f) = \varphi(\alpha)$ es la función de una sola variable α y esta función, cuando $\alpha = 0$, alcanza el mínimo (máximo); por consiguiente, $\varphi'(0) = 0$ o bien $\frac{\partial}{\partial \alpha} F(f_0(x) + \alpha \delta f)|_{\alpha=0} = 0$, o sea,

$$\delta F(f_0(x)) = 0. \tag{8}$$

Ahora bien, (8) es la condición necesaria del extremo de la funcional.

Retornemos a la integral de Dirichlet. Introduzcamos, además, una clase auxiliar $\mathfrak{M}_0$ de funciones w que tengan derivadas parciales continuas sobre $\overline{\Omega}$ y sean iguales a cero sobre Γ:

$$w|_\Gamma = 0.$$

Si la función v tiene la forma

$$v = u + w, \quad w \in \mathfrak{M}_0,$$

entonces, evidentemente, pertenece a W. Inversamente, toda función $v \in W$ se puede escribir en la forma

$$v = u + (v - u) = u + w, \quad w \in \mathfrak{M}_0,$$

porque

$$w|_\Gamma = (v - u)|_\Gamma = v|_\Gamma - u|_\Gamma = \chi(s) - \chi(s) = 0.$$

Por eso la igualdad (7) puede escribirse, además, en la forma

$$D[u] = \min_{w|_\Gamma = 0} D[u + w]. \tag{9}$$

El problema de determinación del mínimo (9) se llama *problema de variación*. Las funciones $w \in \mathfrak{M}_0$ se denominan *variaciones* (variaciones del argumento de la funcional $D[v]$).

Para la función u se alcanza el mínimo de la integral de Dirichlet en la clase W: la adición de la variación arbitraria w a la función u saca la integral de Dirichlet del mínimo: llega a ser más grande.

Asignemos una función arbitraria $w \in \mathfrak{M}_0$. Si la multiplicamos por cualquier número λ, volvemos a obtener la función $\lambda w \in \mathfrak{M}_0$, por eso $D[u + \lambda w] \geqslant D[u]$, $\forall \lambda$. Pero

$$D[u+\lambda w] = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial (u+\lambda w)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (u+\lambda w)}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy + 2\lambda \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx\, dy +$$

$$+ \lambda^2 \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy =$$

$$= D[u] + 2\lambda D[u, w] + \lambda^2 D[w], \quad (10)$$

donde hemos introducido la designación

$$D[u, w] = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Como $u + \lambda w \in W$, tiene lugar la desigualdad $D[u + \lambda w] \geqslant D[u]$ para cualesquiera λ la cual se convierte en igualdad cuando $\lambda = 0$. Por eso la función $D[u + \lambda w]$ de λ se convierte en mínimo cuando $\lambda = 0$.

Pero entonces (véase (10); véase también (8))

$$\frac{d}{d\lambda} D[u+\lambda w]|_{\lambda=0} = \{2D[u, w] + 2\lambda D[w]\}|_{\lambda=0} = 2D[u, w] = 0$$

y queda demostrado que la función buscada u satisface la ecuación

$$D[u, w] = 0$$

o bien la ecuación

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx\, dy = 0 \quad (11)$$

para todos los valores de $w \in \mathfrak{M}_0$. La ecuación (11) se llama *ecuación en variaciones*.

Para calcular la integral

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}\, dx\, dy$$

integramos primero respecto a x para y fija. Integrando por partes, tenemos (fig. 124)

$$\int_{\sigma_y} \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}\,w\Big|_A^B + \frac{\partial u}{\partial x}\,w\Big|_C^D - \int_{\sigma_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,w\,dx = -\int_{\sigma_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,w\,dx,$$

donde σ_y es la sección Ω de la recta compuesta por los puntos que tienen la ordenada y. En la fig. 124 σ_y consta de dos segmentos

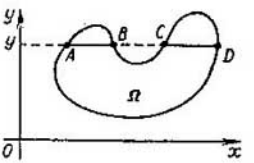

Fig. 124.

$[A, B]$ y $[C, D]$. Es necesario tener en cuenta que la función w es igual a cero en los puntos A, B, C y D que se hallan sobre Γ. Por lo tanto

$$\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy = -\iint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,w\,dx\,dy.$$

Por analogía, integrando primeramente respecto a y y luego respecto a x, obtenemos

$$\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,dy\,dx = -\iint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,w\,dx\,dy.$$

En tal caso de (11) se deduce que

$$\iint_\Omega w\Delta u\,dx\,dy = 0 \tag{12}$$

para todos los valores de $w \in \mathfrak{M}_0$, donde Δ es el operador de Laplace. Pero entonces

$$\Delta u = 0, \quad \forall\ (x, y) \in \Omega.$$

En efecto, si se admite que $\Delta u \neq 0$ al menos en un solo punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces, en virtud de la continuidad de la función Δu existe el entorno $U(\delta)$ del punto (x_0, y_0) de radio δ donde la función Δu conserva el signo del número $\Delta u\,(x_0, y_0)$ el cual consideraremos

positivo. Entonces, tomando en calidad de la función $w \in \mathfrak{M}_0$ la función

$$w(x, y) = \begin{cases} [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\delta^2]^2, & (x, y) \in U(\delta), \\ 0 & (x, y) \in \Omega \setminus U(\delta), \end{cases}$$

obtenemos que

$$\iint_{\Omega} w\Delta u \, dx \, dy = \int_{U} \int_{(\delta)} w\Delta u \, dx \, dy > 0,$$

lo cual contradice (12).

Así, pues, hemos demostrado que la función $z = u(x, y)$ que describe la membrana satisface sobre Ω la ecuación de Laplace, es decir, u es la función armónica sobre Ω. La determinación de $u(x, y)$ se ha reducido al problema de Dirichlet: se requiere hallar una función $u(x, y)$, armónica sobre Ω, que sea continua sobre $\overline{\Omega}$ y satisfaga la condición de frontera (4).

Nota. Se considera sobreentendido el hecho de que la función u tenga sobre $\overline{\Omega}$ derivadas continuas de segundo orden, para que sea legítimo efectuar los cálculos citados anteriormente.

En efecto, esto tiene lugar, en todo caso, si las funciones φ, ψ y χ tienen las derivadas terceras continuas respecto al parámetro s.

§ 5.12. Aplicación de las transformaciones de Fourier

Más abajo se exponen ejemplos de aplicación de las transformaciones de Fourier resolviendo los problemas de la física matemática.

Supongamos que la función $f(x)$ tiene sobre el rayo $[0, \infty]$ la derivada segunda continua y se cumplen las condiciones

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Entonces

$$\int_0^{\infty} f''(x) \operatorname{sen} px \, dx = f'(x) \operatorname{sen} px \Big|_0^{\infty} - p \int_0^{\infty} f'(x) \cos px \, dx =$$

$$= -p \int_0^{\infty} f'(x) \cos px \, dx = -pf(x) \cos px \Big|_0^{\infty} - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} px \, dx =$$

$$= pf(0) - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} px \, dx$$

y queda demostrada la igualdad

$$\int_0^\infty f''(x) \operatorname{sen} px\, dx = pf(0) - p^2 \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} px\, dx. \tag{1}$$

Análogamente,

$$\int_0^\infty f''(x) \cos px\, dx = f'(x) \cos px \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f'(x) \operatorname{sen} px\, dx =$$

$$= f'(0) + p \int_0^\infty f'(x) \operatorname{sen} px\, dx = f'(0) + pf(x) \operatorname{sen} px \Big|_0^\infty -$$

$$- p^2 \int_0^\infty f(x) \cos px\, dx = f'(0) - p^2 \int_0^\infty f(x) \cos px\, dx.$$

o sea, tiene lugar la igualdad

$$\int_0^\infty f''(x) \cos px\, dx = f'(0) - p^2 \int_0^\infty f(x) \cos px\, dx. \tag{2}$$

Desde luego, suponemos que las integrales impropias que forman parte de las igualdades (1) y (2) existen sobre $[0, \infty)$.

§ 5.12.1. Ecuación de conducción del calor

En calidad de ejemplo de aplicación de una seno transformación examinemos la ecuación de conducción del calor (véase el § 5.5) para una barra semiinfinita:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0,\ t > 0) \tag{3}$$

para la condición de frontera

$$u = u_0 \ \text{ cuando } \ x = 0,\ t > 0 \tag{4}$$

y para la condición inicial

$$u = 0 \ \text{ cuando } \ t = 0,\ x > 0. \tag{5}$$

Estimamos que $u, \frac{\partial u}{\partial x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Esto no contradice las consideraciones físicas. Por eso tenemos la posibilidad de aplicar la seno transformación.

Así, pues, sea

$$u_s = u_s(p,\ t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x,\ t) \operatorname{sen} px\, dx \tag{6}$$

la seno transformación de la solución buscada del problema anteriormente puesto.

Multiplicando la ecuación (3) por $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} px$ e integrándola respecto a x entre los límites de 0 a ∞ obtenemos (teniendo en cuenta (4), (5) y (6)):

$$\frac{du_s}{dt} = k\left(p \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_0 - p^2 u_s\right), \quad t > 0; \tag{7}$$

$$u_s = 0 \text{ cuando } t = 0. \tag{8}$$

Ahora bien, hemos reducido el problema a la resolución de una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden. La solución limitada de la ecuación (7), que satisface la condición (8), tiene la forma

$$u_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u_0}{p} [1 - \exp(-p^2 kt)].$$

La fórmula de la inversión (véase el § 4.13, (3)) da

$$u(x,\ t) = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^\infty [1 - \exp(-p^2 kt)] \operatorname{sen} px \frac{dp}{p}. \tag{9}$$

Como sabemos (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 6.10), la integral $\int_0^\infty \operatorname{sen} px \frac{dp}{p}$ converge y, además, (véase más abajo el § 6.14, ejemplo 2)

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} px}{p} dp = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Por eso

$$u = u_0 \left[1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-p^2 kt) \operatorname{sen} px \frac{dp}{p}\right]. \tag{11}$$

Es útil comprobar que la función (11) satisface realmente nuestra ecuación. Al comprobar esto es necesario argumentar la legitimidad de la derivación respecto al parámetro de las respectivas integrales impropias.

Cuando $t = 0$, la integral en el segundo miembro de (11) es igual a $\frac{\pi}{2}$ en virtud de (10). Por eso se cumple la condición inicial (5).

Cuando $x = 0$, esta integral es igual a cero y $u = u_0$, o sea, se cumple la condición de frontera (4).

La integral en (11) converge cuando $t > 0$, porque

$$\int_0^\infty \exp(-p^2kt)\left|\frac{\operatorname{sen} px}{p}\right| dp \leqslant x \int_0^\infty \exp(-p^2kt)\, dp < \infty.$$

Derivando formalmente la igualdad (11) respecto a la variable t, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty p^2 \exp(-p^2kt) \operatorname{sen} px \frac{dp}{p}. \tag{12}$$

Para argumentar la legitimidad de la derivación formal cuando $t > 0$, es necesario asignar un segmento arbitrario $[a, b]$ de variación de t, donde $a > 0$, y demostrar que la integral (12) converge uniformemente sobre este segmento para el valor fijo de $x \geqslant 0$ (véase el teorema 2, § 2.15).

Puesto que $|\operatorname{sen} px| \leqslant px$, entonces, cuando el valor fijo de $x \geqslant 0$, se cumple la desigualdad

$$\int_0^\infty p^2 \exp(-p^2kt)|\operatorname{sen} px| \frac{dp}{p} \leqslant x \int_0^\infty p^2 \exp(-p^2ka)\, dp,$$

donde la integral en el segundo miembro es convergente y no depende de t. Pero entonces la integral (12) converge uniformemente sobre $[a, b]$ y, en virtud del criterio de Weierstrass de la convergencia uniforme de la integral impropia, la derivación formal de (11) es legítima y la fórmula (12) realmente tiene lugar.

De un modo semejante puede ser fundamentada la legitimidad de la derivación formal al obtener la derivada parcial $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Análogamente, utilizando la transformación compleja de Fourier, se puede resolver el problema de conducción del calor para una barra infinita en ambas direcciones $-\infty < x < \infty$ (véase el § 5.6, donde la solución del problema se ha obtenido por el método de Fourier de separación de las variables).

§ 5.12.2. Ecuación de vibración de una cuerda infinita

Como hemos determinado en el § 5.7 la ecuación de vibración de una cuerda tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, \ t > 0). \tag{13}$$

Resolvamos la ecuación (13) para las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (t = 0, \ -\infty < x < \infty). \tag{14}$$

Supongamos que la función $f(x)$ es tal que todos los cálculos que realicemos a continuación serán legítimos.

Sea

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{ixp}\, dx$$

la transformación compleja (inversa) de Fourier de la función $u(x, t)$

Integrando por partes (al suponer que u y $\frac{\partial u}{\partial x}$ se anulan cuando $x = \pm\infty$), obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx = -p^2 \hat{u}. \tag{15}$$

Multiplicando la ecuación (13) por e^{ipx}, al utilizar las condiciones iniciales (14), e integrando respecto a x entre los límites de $-\infty$ a $+\infty$, al utilizar (15), obtenemos la ecuación auxiliar

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} = -a^2 p^2 \hat{u} \quad (t > 0). \tag{16}$$

Las condiciones iniciales se escribirán

$$\left.\begin{aligned} \hat{u} &= \hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{ipz}\, dz, \\ \frac{d\hat{u}}{dt} &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ cuando } t = 0. \tag{17}$$

Resolviendo la ecuación (16) (una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes), obtenemos

$$\hat{u} = \hat{f}(p) \cos apt.$$

La fórmula de la inversión (véase el § 4.12, (19)) da

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixp} \hat{f}(p) \cos apt \, dp =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixp} \frac{e^{iatp} + e^{-iatp}}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ipz} \, dz \, dp =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-ip(x-at)} + e^{ip(x+at)}] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ipz} \, dz \, dp =$$

$$= \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)].$$

Ahora bien, hemos obtenido que

$$u = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)],$$

o sea, hemos obtenido la fórmula de d'Alembert para el problema dado (véase el § 5.8, (11)).

Capítulo 6

Teoría de las funciones de una variable compleja

§ 6.1. Concepto de función de una variable compleja

Hemos examinado el concepto de número complejo en nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», capítulo 5. Allí mismo han sido examinados los polinomios $Q_n(z)$ de una variable compleja. Los polinomios son un ejemplo elemental de funciones de una variable compleja.

Hemos convenido en representar los números complejos mediante los puntos del plano donde está dado el sistema rectangular de coordenadas.

Definamos el concepto de *función de una variable compleja.*

Sean dados dos planos de números complejos $z = x + iy$ y $w = u + iv$ (fig. 125). Examinemos cierto conjunto de los puntos D

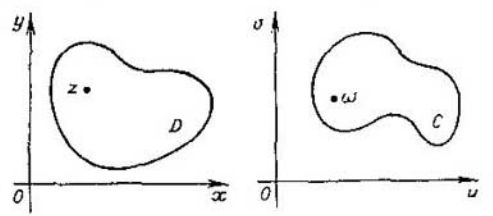

Fig. 125.

en el plano z y cierto conjunto G en el plano w. Si, según cierta ley, a cada número $z \in D$ se le hace corresponder un número complejo determinado $w \in G$, entonces se dice que sobre el conjunto D *está definida una función unívoca de una variable compleja, función que aplica el conjunto D en el conjunto G.* Simbólicamente esto se designa así:

$$w = f(z).$$

El conjunto D se llama *dominio de definición* de la función $f(z)$. Si cada punto del conjunto G es un valor de la función, se dice que G es el *campo de valores* de esta función o bien *imagen del conjunto D* con ayuda de la función f ($G = f(D)$). En este caso se dice, además, que la función f *aplica D sobre G.*

La función $f(z)$ se puede escribir en la forma

$$f(z) = u(x, y)\ f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

donde

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) \quad (x, y) \in D,$$

son las funciones reales de las variables x e y.

Si a cada $z \in (D)$ le corresponden varios valores diferentes de w, la función $w = f(z)$ se denomina *multiforme*.

Los conceptos de límite y de continuidad de una función de una variable compleja se introducen de modo análogo a cómo esto se hace para una función de una variable real; es necesario sólo por doquier en vez del valor absoluto escribir el módulo del número complejo.

Se dice que la función

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

tiene el *límite* en el punto z_0, igual al número $A = a + ib$, si

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} |f(z) - A| = 0. \tag{1}$$

En este caso se escribe

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A.$$

En el lenguaje de las funciones u y v la propiedad (1) se escribe en forma de la igualdad

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2} = 0 \tag{2}$$

o bien, lo que es lo mismo, en forma de dos igualdades [1]

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} u(x, y) = a, \qquad \lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} v(x, y) = b. \tag{3}$$

Para las funciones complejas $f(z)$ y $g(z)$ tienen lugar las propiedades análogas a las propiedades correspondientes de las funciones reales:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z), \\ &\lim_{z\to z_0} [f(z)\, g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) \lim_{z\to z_0} g(z), \\ &\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} \quad (\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1] Véase la definición del límite de una función de dos variables en nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 8.3.

Como siempre, las fórmulas (4) deben entenderse de modo que si existen los límites que están en sus segundos miembros, entonces existen también los límites que están en sus primeros miembros y se cumple la igualdad respectiva.

La función $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ se llama *continua* en el punto z_0 si para ella se cumple la propiedad

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{5}$$

Ahora bien, una función continua en el punto z_0 debe estar definida en el entorno de este punto, inclusive en este mismo punto, y debe cumplirse la igualdad (5). La igualdad (5) es equivalente a dos igualdades:

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0), \qquad \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Por consiguiente, la continuidad de f en el punto z_0 es equivalente a la continuidad de las funciones u y v en el punto (x_0, y_0).

De las propiedades (4) resulta que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de las funciones complejas $f(z)$ y $g(z)$, continuas en el punto z_0, es una función continua en este punto. Si se trata del cociente, en esta enunciación es necesario suponer que $g(z_0) \neq 0$.

EJEMPLO 1. La función $w = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ se da sobre todo el plano complejo. Sus valores son números no negativos. Esta función es continua en todos los puntos del plano complejo:

$$||z + \Delta z| - |z|| \leqslant |\Delta z| \to 0 \quad (\Delta z \to 0).$$

EJEMPLO 2.

$$w = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{6}$$

Es una función multiforme (infinitiforme); $\varphi = \arg z$ es el valor principal del argumento $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$.

EJEMPLO 3. La función $w = z$. Es continua:

$$|z + \Delta z - z| = |\Delta z| \to 0 \quad (\Delta z \to 0).$$

Pero entonces también la función z^n $(n = 2, 3, \ldots)$ es continua como producto de un número finito de funciones continuas.

Llamaremos *región* al conjunto de los números complejos D, si este conjunto de puntos del plano es abierto y conexo. La región D se denomina *simplemente conexa*, si toda curva cerrada continua autodisjunta, trazada en D, limita cierta región G perteneciente por completo a D. Llamaremos a la región que no posee esta propiedad *múltiplemente conexa*.

EJEMPLO 4. El anillo $r < |z| < R$ es una región múltiplemente conexa (doblemente conexa). La curva L (fig. 126) pertenece al

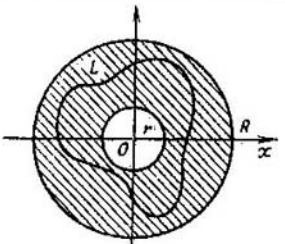

Fig. 126.

anillo, pero limita una región que no forma por completo parte de éste.

§ 6.2. Derivada de la función de una variable compleja

Supongamos que está dada la función uniforme $w = f(z)$ sobre la región D (un conjunto conexo abierto) del plano complejo z.

Se llama *derivada de la función* $f(z)$ *en el punto* z el límite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{dw}{dz} \qquad (1)$$

cuando Δz de un modo cualquiera tiende a cero.

Ni mucho menos toda función de una variable compleja puede ser derivada. La existencia del límite (1) es una exigencia muy fuerte: acercándose $z + \Delta z$ a z por una ruta cualquiera, cada vez debe existir el límite indicado en (1).

La función $f(z)$ que tiene la derivada continua en todo punto de la región D de un plano complejo se denomina *función analítica sobre esta región*.

Se puede demostrar que *si la derivada de la función analítica* $f(z)$ *no es igual a cero sobre la región* D, *entonces el conjunto de los valores* G *de la función* $f(z)$ *asimismo será una región*. Hagamos uso de esta propiedad.

Representemos geométricamente la derivada $f'(z)$ cuando ésta no es igual a cero. Introduzcamos, además del plano z, un plano más de los puntos w. Describamos desde el punto z el círculo abierto σ de radio $\delta > 0$ que tiene por centro este mismo punto (fig. 127).

El punto arbitrario σ tiene la forma $z + \Delta z$, donde Δz es un número complejo arbitrario cuyo módulo es menor que δ: $|\Delta z| < \delta$. Escribamos Δz en la forma potencial

$$\Delta z = \rho e^{i\theta} \quad (\rho > 0). \tag{2}$$

Con ayuda de la función $w = f(z)$ el círculo σ se transforma en cierta región σ' del plano w. La región σ' se compone de los puntos $w + \Delta w$,

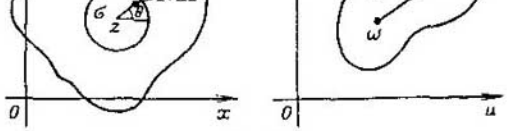

Fig. 127.

donde los incrementos Δw corresponden a todos los incrementos posibles indicados Δz ($|\Delta z| < \delta$) (véase la fig. 127).

De (1) se deduce la igualdad

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(\Delta z), \quad \text{donde } \alpha(\Delta z) \underset{\Delta z \to 0}{\to} 0.$$

Multiplicando los miembros primero y segundo de la última igualdad por Δz, obtenemos

$$\Delta w = f'(z)\,\Delta z + \Delta z \cdot \alpha(\Delta z). \tag{3}$$

El producto $\Delta z \cdot \alpha(\Delta z)$ tiende a cero con mayor rapidez que Δz cuando $\Delta z \to 0$. Por eso, si $f'(z) \neq 0$, el primer término del segundo miembro de (3) es *principal*. Aproximadamente, con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior (en comparación con Δz), siendo Δz bastante pequeños, se puede escribir

$$\Delta w \approx f'(z)\,\Delta z.$$

Vamos a escribir el número $f'(z)$ en la forma exponencial

$$f'(z) = re^{i\varphi} \quad (r > 0). \tag{4}$$

Por eso, teniendo en cuenta (2), obtenemos

$$\Delta w \approx r\rho e^{i(\varphi+\theta)} \quad (|\Delta z| = \rho < \delta).$$

Vemos que el módulo $|\Delta w|$, con una exactitud hasta un infinitésimo de orden superior, es $r = |f'(z)|$ veces mayor que el módulo $|\Delta z|$:

$$|\Delta w| \approx r\rho = r\,|\Delta z|$$

y el argumento Δw (asimismo con una exactitud hasta un infinitésimo de orden superior) se obtiene del argumento Δz, adicionándole el número φ (fig. 128):

$$\operatorname{Arg}(\Delta w) \approx \operatorname{Arg}(\Delta z) + \varphi.$$

Ahora bien, para imaginarse a dónde han pasado los puntos $z + \Delta z$, con $|\Delta z| < \delta$, con ayuda de la función $w = f(z)$ es necesario: 1) hacer girar el círculo σ en el ángulo $\varphi = \arg f'(z)$ y 2) estirarlo $r = |f'(z)|$ veces. Con ayuda de estas dos operaciones cada punto $z + \Delta z$, $|\Delta z| < \delta$, se transformará en cierto punto el cual se debe, además, desplazar en la magnitud $\Delta z \cdot \alpha(\Delta z)$, o sea, en un infinitésimo de un orden superior a Δz.

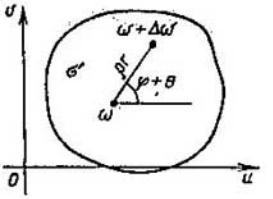

Fig. 128.

Sean Γ_1 y Γ_2 las curvas suaves que salen del punto z. Las tangentes a estas curvas forman con el eje x los ángulos θ_1 y θ_2, respectivamente, (que se leen a partir del eje x en el sentido contrario al de las agujas del reloj). Las imágenes de estas curvas Γ_1' y Γ_2' sobre el plano w (fig. 129), con ayuda de la función $w = f(z)$, tienen las tangentes en el punto w que forman con el eje de abscisas los ángulos θ_1' y θ_2',

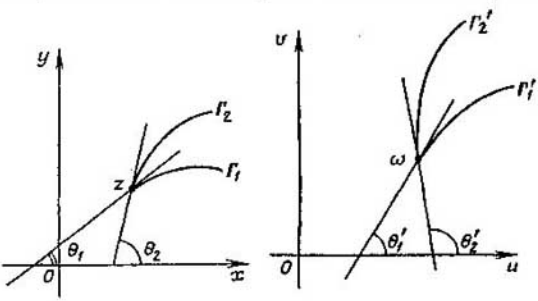

Fig. 129.

respectivamente, (que asimismo se leen en el sentido contrario al de las agujas del reloj). Además, (en virtud de la propiedad 1))

$$\theta_1' = \theta_1 + \varphi, \quad \theta_2' = \theta_2 + \varphi,$$

de donde se deduce la propiedad

$$\theta_2' - \theta_1' = \theta_2 - \theta_1$$

que expresa, como se dice, que la *aplicación dada conserva los ángulos* con la particularidad de que queda invariable el sentido de la lectura (si $\theta_2 > \theta_1$, entonces $\theta_2' > \theta_1'$).

Además, como hemos visto anteriormente, la aplicación dada realiza en cada punto z, donde $f'(z) \neq 0$ el estiramiento que no depende de la dirección.

La aplicación que posee (con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior) la propiedad de conservar los ángulos (con la conservación del sentido de la lectura) y la propiedad de constancia de los estiramientos se llama *aplicación (transformación) conforme.*

De lo expuesto anteriormente resulta que la *aplicación con ayuda de la función analítica* $w = f(z)$ *es conforme en todos los puntos donde* $f'(z) \neq 0$.

Observación 1. *Si la función* $f(z)$ *de la variable compleja* z *tiene por doquier sobre la región* D *la derivada* $f'(z)$, *entonces esta derivada es automáticamente continua por doquier sobre* D, *o sea,* $f(z)$ *es analítica sobre* D. Haremos uso de esta afirmación, aunque no vamos a demostrarla.

Observación 2. De la igualdad (3) se deduce que si la función $f(z)$ tiene una derivada en el punto z, ella es continua en este punto.

La derivada de orden k de la función $f(z)$ se designa por $f^{(k)}(z)$ y se determina por inducción

$$(f^{(k-1)}(z))' = f^{(k)}(z) \quad (k = 1, 2, \ldots; f^{(0)}(z) = f(z)).$$

Sabiendo que la función $f(z)$, analítica sobre la región D, posee la derivada continua sobre D, en adelante no será difícil sacar la conclusión de que $f(z)$ tiene sobre D las derivadas continuas de todo orden

$$f'(z),\ f''(z),\ f'''(z),\ \ldots$$

Se usa, además, tal terminología: la función $f(z)$ se llama *analítica en el punto* z_0 si es analítica en cierto entorno de este punto. Por último, se dice que la función $f(z)$ es analítica en la clausura $\overline{D}$ de la región D, si existe la región G que contiene $\overline{D}$ ($G \supset \overline{D}$) sobre la cual $f(z)$ es analítica.

Citemos las *principales propiedades de las derivadas* de funciones de una variable compleja que son análogas a las propiedades correspondientes de las derivadas para las funciones de una variable real y se demuestran de un modo análogo:

$$[u(z) \pm v(z)]' = u'(z) \pm v'(z), \tag{5}$$

$$[u(z)\,v(z)]' = u(z)\,v'(z) + u'(z)\,v(z), \tag{6}$$

$$\left[\frac{u(z)}{v(z)}\right]' = \frac{u'(z)\,v(z) - u(z)\,v'(z)}{v^2(z)} \quad (v(z) \neq 0), \tag{7}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dv}\,\frac{dw}{dz}. \tag{8}$$

La fórmula (8) debe entenderse así: si w es la función $w = \varphi(v)$ de la variable compleja v, función que tiene la derivada $\frac{dw}{dv} = \varphi'(v)$ y $v = \psi(z)$ es la función de la variable compleja z, función que tiene la derivada $\frac{dv}{dz} = \psi'(z)$ entonces la derivada de la función compuesta

$$w = F(z) = \varphi[\psi(z)]$$

se calcula por la fórmula (8).

A continuación citamos algunas funciones elementales de una variable compleja.

Función potencial

$$w = z^n,$$

donde n es un número entero.

Esta función tiene la derivada que se calcula por la fórmula

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots).$$

Cuando $n > 0$, es cómodo calcularla como límite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1},$$

aplicando el binomio de Newton.

Cuando $n < 0$, se puede utilizar la fórmula (7).

Para $n \geqslant 0$ la función z^n es analítica sobre todo el plano z y para $n < 0$ es analítica sobre todo el plano, expulsando de él el punto $z = 0$.

Funciones e^z, sen z, cos z, tg z.

Las primeras tres de estas funciones están definidas en nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 9.13, como sumas de las series de potencias:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots,$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots.$$

El radio de convergencia de cada una de estas series es igual a ∞. Por eso las derivadas de estas funciones pueden ser obtenidas, para cualquier z, por la derivación término a término de las series correspondientes:

$$(e^z)' = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z,$$

$$(\operatorname{sen} z)' = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \cos z,$$

$$(\cos z)' = -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots = -\operatorname{sen} z.$$

Las fórmulas para las funciones trigonométricas de la suma de los argumentos complejos se mantienen las mismas que en el caso de una variable real.

La función tg z se determina por la fórmula

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.$$

Su derivada es igual a

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} \quad (\cos z \neq 0)$$

lo que se deduce de la fórmula (7).

La función a^z $(a > 0)$ puede ser determinada por la fórmula

$$a^z = e^{z \ln a} = \exp(z \ln a).$$

Su derivada se calcula sobre la base de la fórmula (8) concerniente a la derivada de una función compuesta

$$(a^z)' = (e^{z \ln a})' = e^{z \ln a} \ln a = a^z \ln a.$$

Las funciones hiperbólicas sh z, ch z, th z se definen por las fórmulas

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

De aquí se deduce que

$$\operatorname{sh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \operatorname{sen} z, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z. \tag{9}$$

Sustituyendo en (9) z por iz, obtenemos

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{sen} iz = i \operatorname{sh} z. \tag{10}$$

Señalemos una fórmula más que es fácil de comprobar

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Las fórmulas de adición para las funciones hiperbólicas es fácil de obtenerlas de (9) y (10) y de las fórmulas respectivas para las funciones trigonométricas de una variable compleja. Por ejemplo: $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \cos i(z_1 + z_2) =$

$$= \cos iz_1 \cos iz_2 - \operatorname{sen} iz_1 \operatorname{sen} iz_2 =$$

$$= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

Las derivadas de estas funciones se calculan basándose en las fórmulas (5), (7) y (8):

$$(\operatorname{sh} z)' = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z,$$

$$(\operatorname{th} z)' = \frac{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} \quad (\operatorname{ch} z \neq 0).$$

EJEMPLO 1. Separar las partes real e imaginaria en la función $w = \cos z$ y hallar los ceros de esta función.

Sean $z = x + iy$ y $w = u(x, y) + iv(x, y)$. Tenemos

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos yi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy =$$
$$= \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y.$$

Así, pues, $u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$ y $v(x, y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$. Para hallar los ceros de la función cos z debemos igualar a cero sus partes real e imaginaria:

$$\left.\begin{aligned} \cos x \operatorname{ch} y = 0, \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y = 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolvamos este sistema. Puesto que $\operatorname{ch} y \neq 0$ para toda y real, entonces de la primera ecuación obtenemos $\cos x = 0$. De la segunda ecuación para $y \neq 0$ obtenemos $\operatorname{sen} x = 0$. Cuando las x son reales, el coseno y el seno no se convierten en cero simultáneamente, por eso para $y \neq 0$ el sistema no tiene soluciones. Si $y = 0$, entonces $\operatorname{sh} y = 0$ y la segunda ecuación se satisface para todo valor de x. Ahora bien, los ceros de la función cos z se encuentran sobre el eje real x y coinciden con los ceros de cos x.

Observación 3. De esta afirmación se deduce que los ceros de la función ch z coinciden con los de la función cos y, donde $y = \operatorname{Im} z$.

Observación 4. Notemos, además, que el § 6.15, dedicado a las funciones lineal y lineal fraccional, puede leerse también directamente después del presente párrafo.

§ 6.3. Condiciones de d'Alembert—Euler (de Cauchy—Riemann)

Examinemos la función compleja

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z \in D),$$

definida sobre la región D del plano complejo. Supongamos que su derivada en el punto $z \in D$ es

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{1}$$

Ahora bien, cualquiera que sea el procedimiento por el cual $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ tiende hacia cero, debe existir el límite (1) igual

a un mismo número complejo $f'(z)$. En particular, esto debe tener lugar si

a) $\Delta z = \Delta x + i0 = \Delta x \quad y \quad \Delta x \to 0$

o bien si

b) $\Delta z = 0 + i\Delta y = i\Delta y \quad y \quad \Delta y \to 0.$

En el primer caso (véase el § 6.1, (3))

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

En el segundo caso

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] =$$

$$= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} =$$

$$= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Pero entonces deben cumplirse las igualdades

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

que suelen llamarse *condiciones de Cauchy — Riemann*. Antes pensaban que fueron Cauchy y Riemann los primeros en obtener estas condiciones. Ahora se ha descubierto que ya las conocían Euler y d'Alembert.

De esta manera hemos demostrado el siguiente

TEOREMA 1. *Si la derivada de la función*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

se encuentra en el punto $z = x + iy$, *sus componentes reales* u *y* v *tienen en el punto* (x, y) *las derivadas parciales de primer orden que satisfacen la condición de Cauchy — Riemann.*

El teorema 1 puede ser invertido, si suponemos además que las derivadas parciales de u y v son continuas.

TEOREMA 2. *Si las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen en el punto (x, y) derivadas parciales continuas que satisfacen las condiciones de Cauchy — Riemann, entonces la función de la variable compleja $f(z) = u + iv$ tiene una derivada en el punto $z = x + iy$.*

DEMOSTRACION. Supongamos que las funciones u y v tienen las derivadas parciales continuas en el punto (x, y). Entonces son derivables en este punto, o sea, sus incrementos, correspondientes a los incrementos Δx, Δy, pueden ser escritos en la forma

$$\Delta u = u(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - u(x,\ y) = \\ = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o_1(\rho) \quad (\rho \to 0),$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - v(x,\ y) = \\ = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o_2(\rho) \quad (\rho \to 0),$$

donde $\rho = |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o_1(\rho)$ y $o_2(\rho)$ $(\rho \to 0)$ son las funciones infinitésimas cuya pequeñez es de un orden superior a ρ, o sea, $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{o_j(\rho)}{\rho} = 0$ $(j = 1, 2)$. Por eso, teniendo en cuenta que $o_1(\rho) + i o_2(\rho) = o(\rho)$ $(\rho \to 0)$, tenemos

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \\ = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\Delta z} = \\ = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x}(-\Delta y + i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + o\underset{\rho\to 0}{(1)},$$

porque $\left|\frac{\rho}{\Delta z}\right| = \frac{\rho}{|\Delta z|} = 1$. El símbolo $o\underset{\rho\to 0}{(1)}$ designa la función infinitésima cuando $\rho \to 0$. Así, pues,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

o sea, la función f tiene en el punto z la derivada que es igual a

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

Utilizando las condiciones (2), se puede obtener también otras formas para expresar la derivada $f'(z)$. El teorema queda demostrado.

Si tenemos en cuenta que la existencia de la derivada $f'(z)$ sobre la región D conlleva automáticamente su continuidad sobre D, de los teoremas 1 y 2 se deduce el siguiente

TEOREMA 3. *Para que la función*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

sea analítica sobre la región D del plano z es necesario y suficiente que las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v sean continuas sobre D y se cumplan las condiciones de Cauchy — Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad ((x, y) \in D).$$

Las funciones u y v se llaman *conjugadas una a otra sobre D*.

EJEMPLO 1. Las funciones $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ no son analíticas sobre el plano z. En efecto, cada una de ellas puede ser escrita en la forma $f(z) = u + iv$, donde $u \not\equiv 0$ y $v \equiv 0$ son las funciones reales que, evidentemente, no satisfacen las condiciones de Cauchy — Riemann.

EJEMPLO 2. Comprobar el cumplimiento de las condiciones de Cauchy — Riemann para las partes real e imaginaria de la función $w = \cos z$.

En el ejemplo 1, § 6.2, hemos mostrado que

$$u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v(x, y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y,$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\operatorname{sen} x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\operatorname{sen} x \operatorname{ch} y.$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\forall x, y),$$

o sea, las condiciones de Cauchy — Riemann están cumplidas.

Puesto que las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v son continuas para cualesquiera puntos (x, y), la función $w = \cos z$ es analítica sobre todo el plano complejo.

PROBLEMA 1. Escribir las funciones e^z, sen z, sh z, ch z, z^n (n es un número natural) en la forma

$$f(z) = u + iv,$$

donde $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$, y cerciorarse de que satisfacen las condiciones de Cauchy — Riemann.

Observación 1. Si la función $f(z)$ se representa en la forma

$$f(z) = R(x, y) \exp(i\Phi(x, y)),$$

donde R es el módulo y Φ, el argumento de la función $f(z)$, entonces las condiciones de Cauchy — Riemann tienen el aspecto

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

§ 6.4. Funciones armónicas

Supongamos que sobre la región D del plano z está dada la función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Entonces, como ya hemos señalado en el § 6.2, la función $f(z)$ tiene sobre D las derivadas continuas de cualquier orden. Pero en este caso las funciones u y v tienen sobre D las derivadas parciales continuas de cualquier orden y las derivadas primeras satisfacen las condiciones de Cauchy — Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

de las cuales resulta que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Sumando estas igualdades, obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

El primer miembro de la ecuación (2) se designa por el símbolo

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

La ecuación

$$\Delta u = 0 \tag{3}$$

se llama *ecuación de Laplace*. El símbolo $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ se denomina *operador de Laplace*.

La función u que posee derivadas parciales continuas de segundo orden sobre D y satisface la ecuación de Laplace (3) ha recibido el nombre de *armónica sobre* D.

Pues, hemos establecido que la *parte real de una función analítica sobre* D *es la función armónica sobre* D.

Si la primera igualdad en (1) se deriva respecto a y y la segunda respecto a x y se sustraye la segunda igualdad de la primera, se obtiene

$$\Delta v = 0,$$

o sea, *la parte imaginaria de una función analítica es también una función armónica.*

No obstante, la función $f(z) = u + iv$, donde u y v son funciones arbitrarias armónicas sobre D, no es siempre analítica sobre D. Será analítica sólo si las funciones u y v satisfacen sobre D las condiciones de Cauchy — Riemann.

Mostremos que si D es una región simplemente conexa, entonces para toda función $u(x, y)$ armónica sobre D existe, con una exactitud hasta una constante arbitraria, la función v, conjugada a la u sobre D, tal que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es analítica sobre D.

Sea dada sobre D la función armónica $u(x, y)$. Pongamos

$$P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Por cuanto u tiene sobre D las derivadas parciales continuas de segundo orden que satisfacen la ecuación de Laplace, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

De la igualdad obtenida

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ sobre } D$$

y de la conexión simple de D se deduce (véase el § 3.4) que la integral curvilínea

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right) = v(x, y) \qquad (4)$$

tomada a lo largo de una ruta suave a trozos cualquiera $L \subset D$ que une los puntos (x_0, y_0) y (x, y), depende de estos puntos, pero no depende de la forma de la ruta. En este caso v es una función potencial para el vector (P, Q) sobre D, o sea,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = P = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = Q = \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (5)$$

Esto muestra que v tiene las derivadas parciales continuas sobre D que satisfacen junto con u las condiciones de Cauchy — Riemann. Pero entonces u y v son las funciones conjugadas una a la otra.

Si v_1 es otra función conjugada a u sobre D, entonces

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (6)$$

De (5) y (6) se deduce

$$\frac{\partial (v_1 - v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (v_1 - v)}{\partial y} = 0 \text{ sobre } D.$$

Pero entonces $v_1 - v = C$ sobre D, donde C es la constante. La afirmación queda demostrada.

EJEMPLO 1. La función $u = x^2 - y^2$ satisface, evidentemente, la ecuación $\Delta u = 0$. Hallar la función analítica $f(z)$, en la cual $\operatorname{Re} f(z) = u$.

Determinemos la parte imaginaria de esta función por la fórmula (4) (fig. 130):

$$v = \int_{(0,\,0)}^{(x,\,y)} (2y\,dx + 2x\,dy) =$$

$$= \int_0^x (2 \cdot 0\,dx + 2x \cdot 0) + \int_0^y (2y \cdot 0 + 2x\,dy) = \int_0^y 2x\,dy = 2xy + C.$$

Entonces la función $f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + C) = z^2 + iC$ es analítica en todo el plano complejo.

EJEMPLO 2. La función $w = \bar{z} = x + iy$ es analítica sobre el plano z. Por consiguiente, las funciones $u = x$, $v = y$ son armónicas y satisfacen las condiciones de Cauchy — Riemann sobre el plano z. Esto se puede comprobar directamente.

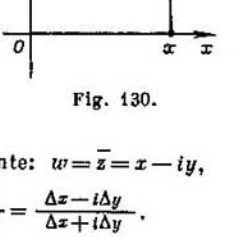

Fig. 130.

EJEMPLO 3. Las funciones $u = x$, $v = -y$ son armónicas, pero las condiciones de Cauchy — Riemann en este caso no se cumplen, por eso la función $f(z) = x + i(-y) = \bar{z}$ no es analítica.

Vamos a convencernos de esto directamente: $w = \bar{z} = x - iy$,

$$\Delta w = \overline{(z + \Delta z)} - \bar{z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} - \bar{z} = \overline{\Delta z}, \quad \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Escojamos dos rutas de acercamiento del punto $z + \Delta z$ al punto z, a saber, a) $\Delta x = 0$, $\Delta y \to 0$; b) $\Delta x \to 0$, $\Delta y = 0$. Entonces:

en el caso a) $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$, o sea, $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} \to -1$;

en el caso b) $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, o sea, $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} \to 1$.

Ahora bien, cuando $\Delta z \to 0$ el límite de $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ no existe y la función $w = \bar{z}$ no tiene la derivada en ningún punto del plano.

Observación 1. En las coordenadas polares $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$ la función armónica $u(x, y)$ se transformará en cierta función nueva respecto a las coordenadas ρ y θ

$$u(\rho \cos \theta, \ \rho \operatorname{sen} \theta) = \omega(\rho, \ \theta).$$

Es fácil ver que

$$\omega'_\rho = u'_x \cos \theta + u'_y \operatorname{sen} \theta,$$
$$\omega''_{\rho^2} = u''_{x^2} \cos^2 \theta + 2u''_{xy} \cos \theta \operatorname{sen} \theta + u''_{y^2} \operatorname{sen}^2 \theta,$$
$$\omega'_\theta = -u'_x \rho \operatorname{sen} \theta + u'_y \rho \cos \theta,$$
$$\omega''_{\theta^2} = u''_{x^2} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta - 2u''_{xy} \rho^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + u''_{y^2} \rho^2 \cos^2 \theta - \rho u'_x \cos \theta - \rho u'_y \operatorname{sen} \theta,$$

de donde

$$\omega''_{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \omega'_\rho + \frac{1}{\rho^2} \omega''_{\theta^2} = u''_{x^2} + u''_{y^2} = \Delta u = 0.$$

En relación con esta ecuación se escribe

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

y el segundo miembro de esta igualdad simbólica se llama operador de Laplace en las coordenadas polares. Hemos demostrado que

$$\Delta \omega(\rho, \ \theta) = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right).$$

§ 6.5. Función inversa

Supongamos que está dada la función analítica

$$w = f(z), \quad (z \in D), \tag{1}$$

que aplica la región D del plano z sobre la región G del plano w de un modo biunívoco. Esto significa que a cada $z \in D$ le corresponde, con ayuda de la función (1), un valor de $w \in G$ y, además, cada $w \in G$, en virtud de esta ley, corresponde solamente a un valor de $z \in D$. De esta manera sobre G queda definida la función unívoca

$$z = \varphi(w), \quad (w \in G), \tag{2}$$

que posee la propiedad consistente en que

$$f[\varphi(w)] = w \quad (w \in G).$$

Evidentemente tiene lugar también otra igualdad

$$\varphi[f(z)] = z \quad (z \in D).$$

La función $z = \varphi(w)$ se llama *función inversa* a $w = f(z)$ $(z \in D)$. Mostremos que si

$$f'(z) \neq 0 \quad (z \in D),$$

entonces la función $z = \varphi(w)$ es una función analítica sobre G.

En efecto, sean los puntos w, $w + \Delta w \in G$. Con ayuda de la función inversa a estos puntos les corresponden los puntos z, $z + \Delta z$. Puesto que, según la condición, la función f tiene una derivada en el punto z, ella es continua en este punto: $\Delta w \to 0$, si $\Delta z \to 0$. En virtud de la biunivocidad indicada es justo asimismo lo inverso, lo que se puede demostrar, pero omitimos esta demostración, $\Delta z \to 0$ si $\Delta w \to 0$. Pero entonces

$$\lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)} \quad (f'(z) \neq 0).$$

Esto muestra que la derivada de la función inversa $z = \varphi(w)$ existe en el punto w y es igual a

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad (w \in G). \tag{3}$$

Puesto que w es un punto arbitrario de G, $f'(z)$ es una función continua y $f'(z) \neq 0$, entonces la función $\varphi(w)$ es analítica sobre G.

EJEMPLO 1. La función [1])

$$w = az + b$$

para $a \neq 0$ aplica biunívocamente todo el plano z sobre todo el plano w. En este caso la función inversa tiene la forma

$$z = \frac{w - b}{a}.$$

Directamente se ve que estas dos funciones son analíticas sobre los planos z y w, respectivamente $(w' = a,\ z' = 1/a)$.

Función $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ (n es un número natural). Partamos el plano R de los puntos z en n sectores por medio de los rayos

$$\theta = \theta_k = \frac{2\pi}{n} k, \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

que salen del punto nulo (véase la fig. 131, donde $n = 3$). Sea D_k el sector

$$\theta_k < \theta < \theta_{k+1}, \quad \rho > 0, \tag{4}$$

[1]) Una información más detallada sobre esta función véase en el § 6.15.

o más exactamente, el conjunto de los puntos $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, que tienen el argumento $\theta = \arg z$ que satisface las desigualdades (4).

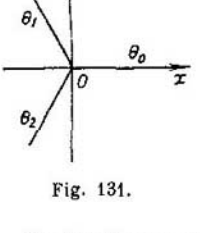

Fig. 131.

Es evidente que D_k es una región. Designemos ahora por D_k^* el conjunto que se obtiene agregando a D_k el rayo $\theta = \theta_k$ (junto con el punto nulo). Los puntos de D_k^* se pueden escribir en la forma

$$z = \rho e^{i\theta} \quad (\theta_k \leqslant \theta < \theta_{k+1}, \quad \rho \geqslant 0).$$

Pongamos, además,

$$\theta = \theta_k + \psi \quad (\theta_k \leqslant \theta < \theta_{k+1}).$$

Si $0 \leqslant \psi < \theta_1 = 2\pi/n$, entonces $\theta_k \leqslant \theta < \theta_{k+1}$ e inversamente.

La función $w = z^n$ aplica D_k^* biunívoca y continuamente sobre todo el plano

$$w = re^{i\varphi} \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi)$$

el cual designemos por R'.
En efecto,

$$re^{i\varphi} = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n e^{in\left(\frac{2\pi}{n}k + \psi\right)} = \rho^n e^{in\psi},$$

por eso

$$r = \rho^n, \quad \varphi = n\psi \quad \left(0 \leqslant \psi < \theta_1 = \frac{2\pi}{n}\right),$$

de donde

$$\rho = r^{1/n} = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \varphi/n,$$

donde $\sqrt[n]{r}$ es el valor aritmético de la raíz n-ésima de r, o sea, un número no negativo cuya n-ésima potencia es igual a r. De lo dicho se deduce que la función $w = z^n$ sobre el conjunto D_k^* tiene la función inversa

$$z = (z)_k = \rho e^{i\theta} = r^{1/n} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}},$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1; \quad w \in R'. \tag{5}$$

En general, la función $w = z^n$ tiene la función n-iforme inversa

$$z = \sqrt[n]{w}$$

que tiene n ramas continuas (5) correspondientes a los números $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Las ramas (5) que se definen por los números $k = 0, 1, \ldots, n-1$ aplican R' sobre $D_0^*, D_1^*, \ldots, D_{n-1}^*$, respectivamente.

Para calcular la derivada de la k-ésima rama tenemos que examinar la región $D_k \subset D_k^*$. Designemos por R_1' el espacio R' sin el rayo $\varphi = 0$.

La función analítica $w = z^n$ aplica biunívocamente D_k sobre R_1'. En este caso la función inversa correspondiente se determina por las fórmulas (5). En virtud de (3) la derivada de ella es igual a $(z \in D_k)$

$$(\sqrt[n]{w})' = (\sqrt[n]{w})_k' = \frac{1}{(z^n)'} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{z}{nw} =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{r^{1/n} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}}{re^{i(\varphi+2k\pi)}} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} e^{i\left(\frac{1}{n}-1\right)[\varphi+2k\pi]} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1}$$

Examinando las regiones D_k en vez de los conjuntos D_k^*, excluimos del examen los rayos $\theta = \theta_k$ del plano R. Si nos interesara el comportamiento de la función z^n en los entornos de estos rayos, deberíamos cortar el plano R mediante los rayos

$$\theta = \theta_k + \alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi/n, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

y suponer que D_k y D_k^* son los conjuntos de los puntos $z \in R$ definidas respectivamente por las desigualdades

$$\theta_k + \alpha < \theta < \theta_{k+1} + \alpha, \quad \theta_k + \alpha \leqslant \theta < \theta_{k+1} + \alpha.$$

Funciones e^z y $\ln z$. La función

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \quad (z = x + iy)$$

es analítica sobre el plano R de los puntos z. No es igual a cero para todos los valores de $z \in R$. Esto se desprende del hecho de que

$$e^x \neq 0 \quad \text{y} \quad |e^{iy}| = 1.$$

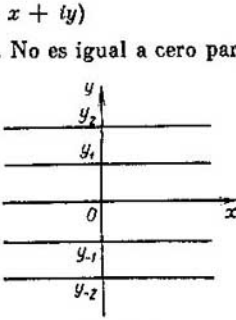

Fig. 132.

Designemos por R' el plano de los puntos w, por R_0' este plano con el punto O sacado del mismo y por R_1' este plano con el rayo positivo del eje x, sacado del mismo.

A continuación veremos que la imagen R, con ayuda de la función $w = e^z$, es la región R_0'. Sin embargo, la aplicación de R sobre R_0' no es biunívoca: la función inversa a $w = e^z$, llamada *logaritmo natural de* w y designada por

$$z = \ln w \quad (w \in R_0'),$$

es infinitiforme. A continuación definiremos esta función.

Para esto partimos R en franjas mediante las rectas (fig. 132)

$$y = y_k = 2\pi k$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Designemos la franja abierta $y_k < y < y_{k+1}$ por D_k y la franja semicerrada $y_k \leqslant y < y_{k+1}$ por D_k^*.

El cambio de la variable y por η con ayuda de la igualdad

$$y = y_k + \eta$$

aplica biunívocamente la franja D_k^* de los puntos $z = x + iy$ sobre la franja D_1^* de los puntos $x + i\eta$.

Examinemos la función $w = e^z$ sobre el conjunto D_k^*. Poniendo $z = x + iy$, $w = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, tendremos

$$w = re^{i\varphi} = e^x e^{iy} = e^x e^{i(2k\pi+\eta)} = e^x e^{i\eta} \ (0 \leqslant \eta < 2\pi),$$

de donde

$$r = e^x, \quad \varphi = \eta.$$

Ahora bien

$$x = \ln r = \ln |\, w \,|,$$

$$y = y_k + \eta = y_k + \varphi = 2k\pi + \arg w \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Por consiguiente, la función $w = e^z$ tiene sobre la franja D_k^* la función unívoca inversa

$$z = x + iy = (z)_k = \ln |\, w \,| + i \ (\arg w + 2k\pi),$$
$$k = 0, \pm 1, \ldots, \ w \in R_0'. \qquad (6)$$

En general, la función $w = e^z$ tiene una función inversa infinitiforme

$$z = \ln w, \quad (w \in R_0'),$$

que tiene un número infinito de las ramas continuas (6) correspondientes a los números $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Mediante la función analítica $w = e^z$ la región D_k se aplica biunívocamente sobre la región R_1' del plano w. La función unívoca inversa a ella, que se define para el número k *dado* por la igualdad (6), es analítica sobre R_1'. Su derivada se calcula de la mejor manera con ayuda de la fórmula (3):

$$(\ln w)' = (\ln w)_k' = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w} \ (w \in R_1'). \qquad (7)$$

Subrayamos que aquí no hemos calculado la derivada de la función multiforme $\ln w$, sino de su determinada rama unívoca que corresponde a cierto número k.

El hecho de que la derivada resulta igual a la función $1/w$ no dependiente de k tiene su explicación en que las diferentes ramas (6) se distinguen en una constante.

Al calcular la derivada de $z = \ln w$ hemos supuesto que los puntos z pertenecen a las regiones D_k sin someter a examen las rectas $y = y_k$ del plano R.

Si nos interesara el comportamiento de las funciones investigadas sobre las rectas $y = y_k$, deberíamos cortar el plano R mediante las rectas desplazadas

$$y = y_k + \alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi, \quad y_k = 2\pi k, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

considerando de este modo que D_k es la región de los puntos $z = x + iy$ para los cuales $y_k + \alpha < y < y_{k+1} + \alpha$.

La función potencial z^α (α es un número real) se determina por la fórmula

$$w = z = e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha [\ln |z| + i (\arg z + 2k\pi)]} =$$

$$= |z|^\alpha e^{i\alpha (\arg z + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (8)$$

o bien

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha (\theta + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad (8')$$

donde

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Si α es un número entero, entonces

$$e^{i\alpha 2k\pi} = 1$$

y

$$w = (\rho e^{i\theta})^\alpha = z^\alpha,$$

donde z^α se entiende en el sentido habitual como el producto α de los factores z.

Si $\alpha = \pm p/q$, donde $p > 0$, $q > 0$, son los números enteros, entonces los números del segundo miembro en (8') son esencialmente diferentes sólo para $k = 0, 1, \ldots, q - 1$:

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha (\theta + 2k\pi)} \quad (k = 0, 1, \ldots, q - 1).$$

En particular, cuando $\alpha = 1/n$ y n es un número natural, ya hemos obtenido este resultado (véase (5)).

No obstante, si α es un número irracional, entonces las funciones definidas por la fórmula (8) ó (8') para diferentes k son distintas. Son *las ramas continuas de la función multiforme* (infinitiformes) $w = z^\alpha$.

Luego tenemos ($z = \rho e^{i\theta}$).

$$(z^\alpha)' = (e^{\alpha \ln z})' = e^{\alpha \ln z} \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha \frac{e^{\alpha [\ln \rho + i (\theta + 2k\pi)]}}{e^{[\ln \rho + i (\theta + 2k\pi)]}} =$$

$$= \alpha e^{(\alpha - 1)[\ln \rho + i (\theta + 2k\pi)]} = \alpha z^{\alpha - 1},$$

o sea, la igualdad

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1} \tag{9}$$

justa para toda rama z^α. De esta manera, la rama $z^{\alpha-1}$ del segundo miembro de (9) debe ser tomada con el mismo valor de k con el que ha sido tomada la rama z^α del primer miembro.

Observación 1. Las funciones inversas para las funciones trigonométricas e hiperbólicas se pueden introducir de un modo análogo.

Por ejemplo, la función $w = \operatorname{Arcsen} z$ es inversa a la función $z = \operatorname{sen} w$, o sea, $\operatorname{sen}[\operatorname{Arcsen} z] = z$.

De la ecuación

$$z = \operatorname{sen} w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}}$$

encontramos

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0, \quad e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2},$$

o sea,

$$iw = \ln | iz \pm \sqrt{1 - z^2} | + i [\arg (iz \pm \sqrt{1 - z^2}) + 2k\pi].$$

Así, pues,

$$w = \operatorname{Arcsen} z = -i [\ln | iz \pm \sqrt{1 - z^2} | + i [\arg (iz \pm \sqrt{1 - z^2}) + 2k\pi]$$

es una función de infinitiforme ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Análogamente se puede obtener

$$\operatorname{Arccos} z = -i [\ln | z \pm \sqrt{z^2 - 1} | + i [\arg (z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2k\pi]],$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \left[\ln \left| \frac{1 + zi}{1 - zi} \right| + i \left(\arg \frac{1 + zi}{1 - zi} + 2k\pi \right) \right],$$

$$\operatorname{Arsh} z = \ln | z \pm \sqrt{z^2 + 1} | + i [\arg (z \pm \sqrt{z^2 + 1}) + 2k\pi],$$

$$\operatorname{Arch} z = \ln | z \pm \sqrt{z^2 - 1} | + i [\arg (z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2k\pi].$$

§ 6.6. Integración de funciones de una variable compleja

Sea $w = f(z) = u + iv$ una función continua de la variable compleja z, definida en la región D, y sea L una curva suave en D, teniendo por comienzo el punto A y por fin el punto B (fig. 133), curva definida por la ecuación

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$
$$(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

o, lo que es lo mismo, por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{1}$$

Como siempre, la dirección sobre L corresponde a la variación del parámetro t entre α y β ($A = z(\alpha)$, $B = z(\beta)$).

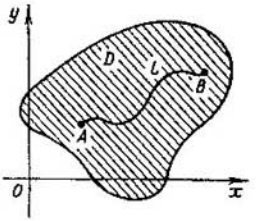

Fig. 133.

La integral de la función $f(z)$ tomada a lo largo de la curva L se define del modo siguiente:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_L (u\,dx - v\,dy) +$$

$$+ i \int_L (v\,dx + u\,dy) = \int_\alpha^\beta [u(x(t),\ y(t))\,x'(t) - v(x(t),$$

$$y(t))\,y'(t)]\,dt + i \int_\alpha^\beta [v(x(t),\ y(t))\,x'(t) + u(x(t),\ y(t))\,y'(t)]\,dt. \tag{2}$$

Si se tiene en cuenta que $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ y $u(x(t), y(t)) = u(z(t))$, la igualdad (2) se puede escribir en forma abreviada así:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt. \tag{3}$$

Ahora bien, de (2) se ve que la integral de una variable compleja es la suma de dos integrales curvilíneas y su cálculo se reduce al de las integrales ordinarias.

La integral (2) existe para toda función continua $f(z)$ (en este caso las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ también son continuas) y para toda curva suave L (o sea, cuando $x'(t)$, $y'(t)$ son continuas y $x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0$).

Si la curva L es suave a trozos y se compone de trozos suaves orientados $L_1, \ldots, L_n$, entonces, según la definición, consideramos

$$\int_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)\,dz. \tag{4}$$

En virtud de las propiedades de una integral curvilínea obtenemos fácilmente

1) $\int_L f(z)\,dz = -\int_{L^-} f(z)\,dz$,

donde L^- es la misma curva que L, pero de orientación contraria (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 7.4).

2) $\int_L [Af(z) + B\varphi(z)]\,dz = A\int_L f(z)\,dz + B\int_L \varphi(z)\,dz$,

donde A y B son los números constantes.

3) Si $|f(z)| \leqslant M$ para $z \in L$, entonces

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leqslant Ml,$$

donde l es la longitud de L.

En efecto, en virtud de la propiedad ordinaria tenemos

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f[z(t)]|\cdot|z'(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_\alpha^\beta M|z'(t)|\,dt = M\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = Ml.$$

EJEMPLO 1.

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \tag{5}$$

donde L es la circunferencia que tiene por centro el punto z_0 y está orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

En efecto, la ecuación de L se puede escribir en la forma

$$z = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leqslant t < 2\pi),$$

donde ρ es el radio de la circunferencia L. Por eso

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it}\,dt}{\rho e^{it}} = i\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i.$$

EJEMPLO 2. Para un n entero, $n \neq -1$,

$$\int_L (z - z_0)^n \, dz = 0, \tag{6}$$

donde L es la circunferencia que tiene por centro el punto z_0 y está orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

En efecto,

$$\int_L (z - z_0)^n \, dz = \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} i e^{i(n+1)t} \, dt =$$

$$= i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt = i\rho^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (n+1 \neq 0),$$

porque $e^{i2(n+1)\pi} = 1$ para n enteros cualesquiera.

TEOREMA 1 (DE CAUCHY). *Si la función $f(z)$ es analítica sobre una región D simplemente conexa, entonces la integral de $f(z)$ tomada a lo largo de cualquier contorno cerrado suave a trozos Γ, perteneciente a D, es igual a cero*

$$\int_\Gamma f(z) \, dz = 0.$$

DEMOSTRACIÓN Por cuanto $f(z) = u + iv$ es una función analítica sobre D, las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuamente derivables y se cumplen las condiciones de Cauchy—Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{7}$$

en virtud de las cuales las expresiones $v\,dx + u\,dy$ y $u\,dx - v\,dy$ son las diferenciales totales de ciertas funciones. Por eso las integrales curvilíneas de estas expresiones tomadas a lo largo del contorno cerrado Γ son iguales a cero (véanse los §§ 3.4 y 3.5). Pero entonces, conforme a la igualdad (2),

$$\int_\Gamma f(z) \, dz = \int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i \int_\Gamma (v\,dx + u\,dy) = 0.$$

EJEMPLO 3.

$$\int_\Gamma z^n\,dz = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\int_\Gamma e^z\,dz = 0, \qquad \int_\Gamma a^z\,dz = 0 \quad (a > 0),$$

$$\int_\Gamma \operatorname{sen} z\,dz = 0, \qquad \int_\Gamma \cos z\,dz = 0,$$

$$\int_\Gamma \operatorname{sh} z\,dz = 0, \qquad \int_\Gamma \operatorname{ch} z\,dz = 0,$$

donde Γ es un contorno suave a trozos cerrado arbitrario, porque las funciones subintegrales son analíticas sobre el plano z. Estas tienen la derivada continua en todos los puntos z del plano complejo.

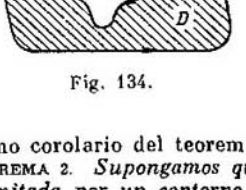

Fig. 134.

Fig. 135.

Como corolario del teorema 1 obtenemos el siguiente

TEOREMA 2. *Supongamos que la región D de un plano complejo está limitada por un contorno suave a trozos compuesto Γ, orientado positivamente, o sea, al recorrer el contorno Γ los puntos de D quedan a la izquierda. Entonces para la función $f(z)$, analítica sobre $\overline{D}$, tiene lugar la igualdad*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Aclaremos este teorema. En la fig. 134 está representada la región doblemente conexa D cuyo contorno suave a trozos $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ está orientado positivamente.

Unamos los contornos Γ_1 y Γ_2 con ayuda de un trozo suave γ, como lo muestra la fig. 135. Orientemos γ por dos métodos contrarios: γ_+, γ_-. Como resultado obtenemos la región nueva D^1, simplemente

conexa, limitada por el contorno orientado $\Gamma_2 + \gamma_+ + \Gamma_1 + \gamma_-$. Según el teorema 1

$$\int_{\Gamma_2+\gamma_+\Gamma_1+\gamma_-} f(z)\,dz = 0.$$

Pero

$$\int_{\gamma_-+\gamma_+} f(z)\,dz = \int_{\gamma_-} f(z)\,dz + \int_{\gamma_+} f(z)\,dz = 0,$$

por eso

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

En este caso cada una de las integrales $\int_{\Gamma_1}$ y $\int_{\Gamma_2}$ puede también no ser igual a cero.

Observación 1. Para brevedad, a continuación escribiremos a veces en lugar de «contorno suave a trozos continuo cerrado» simplemente «contorno».

Del teorema 2 se deduce como corolario el siguiente

TEOREMA 3. *Supongamos que la región D está limitada por el contorno exterior* Γ, *orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y por los contornos interiores* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_N$, *orientados en el mismo sentido* (como lo muestra la fig. 136, donde $N = 3$) *y supongamos que sobre D está dada la función analítica* $f(z)$.

Entonces tiene lugar la igualdad

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz. \tag{8}$$

En efecto, si suponemos que Γ_k^- es un contorno igual a Γ_k, pero orientado en el sentido de las agujas del reloj, entonces según el teorema 2

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k^-} f(z)\,dz = 0,$$

de donde se deduce (8), puesto que

$$\int_{\Gamma_k^-} f(z)\,dz = -\int_{\Gamma_k} f(z)\,dz.$$

Señalemos que si en el teorema $3N = 1$, entonces

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz \tag{9}$$

(fig. 137).

Observación 2. De la igualdad (9), o sea, del teorema 3 para $N = 1$, resulta que las igualdades (5) y (6) siguen siendo justas si en ellas la circunferencia L que tiene por contro el punto z_0 se

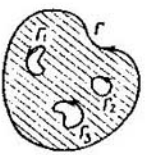

Fig. 136.

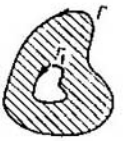

Fig. 137.

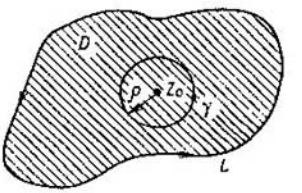

Fig. 138.

sustituye por cualquier contorno suave a trozos cerrado L' que contenga dentro el punto z_0 y esté orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj:

$$\int_{L'} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \tag{10}$$

$$\int_{L'} (z - z_0)^n\,dz = 0 \quad (n \neq -1). \tag{11}$$

Las fórmulas (10) y (11) son *principales* en esta teoría. Son precisamente ellas a las que, como veremos suele reducirse el cálculo de las integrales curvilíneas de las funciones analíticas (véase a continuación los §§ 6.10 y 6.11).

§ 6.7. Fórmula de Cauchy

Supongamos que la función $f(z)$ es analítica en la región cerrada simplemente conexa $\overline{D}$ ($\overline{D} = D \cup \partial D$) provista de una frontera suave a trozos L. Entonces tiene lugar la fórmula de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}, \tag{1}$$

donde z_0 es un punto cualquiera dentro del contorno L, y la integración se realiza en el sentido positivo (fig. 138), o sea, en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Ahora bien, es suficiente determinar la función analítica sobre el contorno L y con ayuda de la fórmula (1) se puede obtener automáticamente sus valores en otros puntos de D.

Para demostrar la fórmula (1) examinemos la función

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{2}$$

La función $\varphi(z)$ es analítica en todos los puntos de $\overline{D}$, salvo $z = z_0$. Describamos alrededor del punto z_0 la circunferencia $\gamma \subset D$ (véase la fig. 138). Entonces, según el teorema 3 del § 6.6

$$\int_L \varphi(z)\, dz = \int_\gamma \varphi(z)\, dz \tag{3}$$

y el valor de la integral

$$\int_\gamma \varphi(z)\, dz = \int_{|z - z_0| = \rho} \varphi(z)\, dz$$

de hecho no depende de ρ. Observemos que de (2) se desprende que

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = f'(z_0).$$

Si la función $\varphi(z)$ se define en el punto z_0, poniendo $\varphi(z_0) = f'(z_0)$, entonces se hace continua en la región cerrada $\overline{D}$ y, por consiguiente, su módulo está acotado: $|\varphi(z)| \leqslant M$, $\forall z \in \overline{D}$. En virtud de lo dicho (véase la propiedad 3 del § 6.6)

$$\left| \int_\gamma \varphi(z)\, dz \right| \leqslant M \cdot 2\pi\rho.$$

Puesto que el número ρ se puede tomar tan pequeño como se quiera y la integral $\int_\gamma \varphi(z)\, dz$ no depende de ρ, entonces

$$\int_\gamma \varphi(z)\, dz = 0.$$

Por eso de (3) tenemos

$$\int_L \varphi(z)\, dz = \int_L \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

Ya que (véase (10) del § 6.6)

$$\int_L \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \int_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0),$$

la fórmula de Cauchy queda demostrada.

La fórmula de Cauchy tiene lugar también para una región múltiplemente conexa y su demostración se puede reducir a la fórmula de Cauchy para la región simplemente conexa, ya demostrada.

En la fig. 139 está representada la región doblemente conexa D cuya frontera L orientada positivamente se compone de dos contornos cerrados, correspondientemente orientados ($L = L_0 + L_1$).

Sea z_0 un punto arbitrario de D. Vamos a unir los contornos L_0 y L_1 por una curva suave a trozos γ orientada desde L_1 hasta L_0

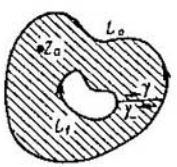

Fig. 139.

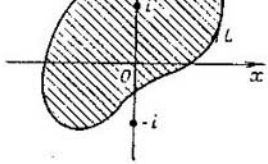

Fig. 140.

la cual no pasa por el punto z_0. Junto con la curva γ introduzcamos la curva γ_- que coincide con aquélla, pero es de orientación contraria.

Si de la región D se saca γ, la región D_* que queda será simplemente conexa, provista de una frontera orientada positivamente:

$$L' = L_0 + \gamma_- + L_1 + \gamma = L + \gamma_- + \gamma.$$

La función $f(z)$ es analítica sobre $\overline{D}_*$ y $z_0 \in D_*$. Por eso en virtud del teorema de Cauchy para la región simplemente conexa

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{L} + \int\limits_{\gamma} + \int\limits_{\gamma_-} \right) \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

porque $\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0.$

EJEMPLO 1. Calcular la integral

$$\int\limits_{L} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 + 1}\, dz,$$

donde L es el contorno, orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj, que contiene el punto $z = i$ (fig. 140) y es tal que el punto $z = -i$ se encuentra fuera de él.

Escribamos nuestra integral en la forma

$$\int_L \frac{\operatorname{sen} z\, dz}{(z+i)(z-i)}$$

y examinemos la función $f(z) = \operatorname{sen} z/(z+i)$. En virtud de nuestras suposiciones sobre el contorno L esta función es analítica en la región cerrada, limitada por el contorno L, y por eso, según la fórmula de Cauchy,

$$\int_L \frac{\operatorname{sen} z\, dz}{z^2+1} = \int_L \frac{f(z)}{z-i}\, dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{\operatorname{sen} i}{2i} = \pi \operatorname{sen} i = \pi i \operatorname{sh} 1.$$

§ 6.8. Integral del tipo de Cauchy

La expresión

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)\, dz}{z-z_0},$$

donde $f(z)$ es la función analítica en la región cerrada $\overline{D}$ limitada por el contorno L orientado positivamente, se llama *integral de Cauchy*.

Si z_0 se encuentra dentro de L, la integral será igual a $f(z_0)$; si z_0 está fuera de L, $\frac{f(z)}{(z-z_0)}$ será la función analítica en $\overline{D}$ y, por consiguiente, la integral de Cauchy será igual a cero.

Supongamos ahora que $\mathscr{L}$ es cualquier curva suave a trozos orientada, no obligatoriamente cerrada y $\varphi(z)$ una función continua determinada a lo largo de $\mathscr{L}$. La expresión

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{L}} \frac{\varphi(z)}{z-z_0}\, dz \tag{1}$$

se denomina *integral del tipo de Cauchy*. No es más que la función $F(z_0)$ determinada fuera de $\mathscr{L}$ ($z_0 \notin \mathscr{L}$).

TEOREMA 1. *La integral* (1) *del tipo de Cauchy es la función analítica* $F(z_0)$ *para todos los valores de* $z_0 \notin \mathscr{L}$.

La derivada del orden n *de* $F(z_0)$ *se calcula por la fórmula*

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathscr{L}} \frac{\varphi(z)\, dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

DEMOSTRACION. Sea σ un círculo arbitrario sin puntos comunes con la curva $\mathcal{L}$. La función de dos variables complejas z_0 y z

$$\Phi(z_0, z) = \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$$

es continua sobre el conjunto $\sigma \times \mathcal{L}$ ($z_0 \in \sigma$, $z \in \mathcal{L}$) y tiene sobre éste la derivada parcial continua

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_0} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^2}$$

(hay que tener en cuenta que puesto que el círculo σ no se interseca con $\mathcal{L}$, entonces, cualesquiera que sean $z_0 \in \sigma$ y $z \in \mathcal{L}$, la diferencia $z - z_0 \neq 0$). Esto muestra que la derivación de $F(z_0)$ respecto al parámetro z_0 es legítimo realizarla bajo el signo integral en (1):

$$F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(z)\, dz}{(z - z_0)^2}.$$

En este caso la derivada $F'(z_0)$ es continua fuera de $\mathcal{L}$ (véase el § 2.4, teorema 4, el cual se generaliza fácilmente para el caso de integral de una variable compleja).

Hemos demostrado la fórmula (2) para $n = 1$. Para $n \geqslant 2$ los razonamientos se efectúan por inducción.

COROLARIO 1. *Si la función $w = f(z)$ es analítica en la región D, o sea, es continua su derivada primera sobre D, entonces ella tiene derivadas de todos los órdenes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean z_0 cualquier punto de D y σ un círculo, con el centro en z_0, que se halla por completo en la región D y sea γ la circunferencia, o sea, la frontera de σ orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Entonces por la fórmula de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{z - z_0},$$

o sea, la función $f(z_0)$ se representa por la integral del tipo de Cauchy cuando $\mathcal{L} = \gamma$ y $\varphi(z) = f(z)$. Por lo tanto, en virtud del teorema 1, $f(z)$ es infinitamente derivable y

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

§ 6.9. Serie de potencias

Examinemos la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (|z - z_0| < R), \tag{1}$$

cuyo radio de convergencia es $R > 0$.

De la teoría de las series de potencias sabemos que la serie (1) converge uniformemente sobre el círculo $|z| \leqslant \rho$, donde ρ es todo número positivo menor que R ($\rho < R$). Por eso la suma $f(z)$ de la serie (1) es una función continua en el círculo abierto $|z - z_0| < R$. Además, $f(z)$ tiene sobre este círculo la derivada continua $f^{(n)}(z)$ de todo orden la cual se puede calcular derivando la serie (1) término a término. Esto muestra que la suma de la serie de potencias es una *función analítica* en el círculo (¡abierto!) de su convergencia. Los números c_k se calculan por la fórmula

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

lo que muestra que la serie de potencias es la serie de Taylor de su suma. En virtud de las igualdades (3) del § 6.8 esta fórmula puede ser sustituida por la siguiente:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

donde L es un contorno arbitrario orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj, que pertenece al círculo de convergencia de la serie (1) y contiene dentro el punto z_0.

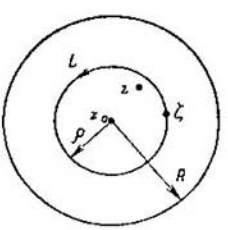

Fig. 141.

Sin embargo, es justo también el siguiente

TEOREMA 1. *La función $f(z)$, analítica en el círculo $|z - z_0| < R$, se desarrolla en una serie de potencias, convergente hacia ella, según las potencias de $(z - z_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(z)$ una función analítica en el círculo $|z - z_0| < R$. Designemos por z un punto cualquiera dentro de este círculo (fig. 141). Describamos la circunferencia L, que tiene por centro el punto z_0 y es de radio $\rho < R$, de modo que el punto z resulte dentro del contorno L. Entonces la función $f(z)$ será analítica sobre el contorno L y dentro de él. Por eso, según el teorema de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)}. \tag{3}$$

La fracción $1/(\zeta - z)$ se puede representar en la forma

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}. \tag{4}$$

Cuando el punto $\zeta \in L$ y z se halla dentro de este contorno, entonces

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{\rho} < 1. \tag{5}$$

Por eso $1\Big/\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)$ se puede considerar como suma de la progresión geométrica convergente

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = 1 + \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2 + \ldots . \tag{6}$$

De (4) y (6) obtenemos

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0} + \frac{z-z_0}{(\zeta-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(\zeta-z_0)^3} + \ldots , \tag{7}$$

además, la serie (7) converge uniformemente para cualesquiera $\zeta \in L$ y z constante, porque, como se ve de (5), la expresión $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|$ no depende de $\zeta \in L$ y es menor que 1.

Multiplicando (7) por $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ (sin alterar su convergencia uniforme) e integrando a lo largo de L, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z_0} + \frac{z-z_0}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^2} + \ldots .$$

En virtud de (3)

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots, \tag{8}$$

donde hemos designado

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{9}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que la función analítica $f(z)$ en el círculo $|z-z_0| < R$ se representa por la serie de potencias (8) con los coeficientes (9), o sea, por su serie de Taylor.

EJEMPLO 1. Al desarrollar las funciones en serie de Taylor se puede utilizar los desarrollos conocidos de las funciones elementales. Por ejemplo,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

por eso

$$\operatorname{sen}^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \frac{-1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}.$$

EJEMPLO 2. La función $\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ en un entorno bastante pequeño de $z = 0$ es una función analítica $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$, $\cos z \neq 0$). Por eso la función dada puede desarrollarse en serie de Taylor según las potencias de z, aunque es difícil de calcular la forma general del coeficiente. Tenemos $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 2$, o sea,

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2z^3}{3!} + \ldots$$

EJEMPLO 3. Desarrollar en serie de Taylor la función $w = \operatorname{sh} z$ y $w = \operatorname{ch} z$. Tenemos $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, por eso $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

§ 6.10. Serie de Laurent [1]

TEOREMA 1. *Sea* $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. *Toda función analítica* $f(z)$ *en el anillo*

$$r < |z - z_0| < R \tag{1}$$

se representa unívocamente en este anillo en la forma de la serie convergente

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \tag{2}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

y γ *es cualquier circunferencia* $|\zeta - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$ *orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj.*

La serie (1) se llama *serie de Laurent de la función* $f(z)$ según las potencias de $(z - z_0)$ o *desarrollo de Laurent de la función* $f(z)$ *en el anillo* $r < |z - z_0| < R$.

[1] P. Laurent (1813—1854), matemático francés.

OBSERVACIÓN 1. Cuando se dice que la serie $\sum_{-\infty}^{\infty}$ converge, se entiende que convergen por separado las series $\sum_{n=0}^{\infty}$ y $\sum_{n=-\infty}^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. Tomemos las circunferencias c y C de radios r' y R' $(r < r' < R' < R)$ que tienen por centro el punto z_0, donde están orientadas en el sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. 142).

En virtud de la condición del teorema $f(z)$ es analítica en el anillo entre las circunferencias c y C y sobre las mismas circunferencias. Por eso según la fórmula de Cauchy para un contorno compuesto tenemos

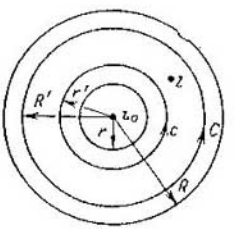

Fig. 142.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \tag{4}$$

o bien

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \tag{4}$$

donde z es un punto entre las circunferencias c y C.

En la primera integral la ζ designa un punto de la circunferencia C, por eso

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{R'} < 1,$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left[1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \tag{5}$$

con la particularidad de que la serie que se encuentra a la derecha converja uniformemente para $\zeta \in C$ (para un valor fijo de z).

En la segunda integral ζ designa un punto de la circunferencia c, por eso

$$\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r'}{|r - z_0|} < 1,$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - z_0)\left[1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right]} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{6}$$

con la particularidad de que la serie dispuesta a la derecha converja uniformemente para todos los valores de $\zeta \in c$ (siendo fijo el valor de z).

Sustituyendo (5) y (6) en (4) e integrando término a término, obtenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n}} (z - z_0)^{-n-1} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} (z - z_0)^{-n} \quad (7)$$

Puesto que la función $f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{n+1}$ es analítica en el anillo para todo valor de n, entonces, en virtud del teorema de Cauchy, la integral (3) será igual a la integral semejante tomada sobre una circunferencia cualquiera, en particular sobre c y C. Por eso de (7) se deduce (2), donde los números c_n se calculan mediante las fórmulas (3).

La primera serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ en el segundo miembro de (2) converge en el círculo $|z - z_0| < R$ hacia cierta función $f_1(z)$, analítica en este círculo. Se llama *parte regular de la serie de Laurent*.

La segunda serie en el segundo miembro de (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

converge para $|z - z_0| > r$. Determina cierta función analítica $f_2(z)$ denominada *parte principal de la serie de Laurent*.

Así, pues,

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

donde $f_1(z)$ es la función analítica en el círculo $|z - z_0| < R$ y $f_2(z)$, fuera del círculo de radio r con el centro en el punto z_0 ($|z - z_0| > r$). Dentro del anillo $r < |z - z_0| < R$ estas dos funciones son analíticas.

Los coeficientes c_n de la serie de Laurent de la función $f(z)$ examinada son únicos, porque se calculan por las fórmulas (3).

EJEMPLO 1. La función

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}$$

es analítica sobre el plano z, a excepción de los puntos $z=2$ y $z=3$.

a) La función $f(z)$ es analítica en el círculo $|z|<2$ y por eso en virtud del teorema 1 del § 6.9 puede ser desarrollada en serie de Taylor según las potencias de z, convergente en el círculo $|z|<2$:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{8}$$

Los números c_k se pueden calcular por la fórmula

$$c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{9}$$

Sin embargo, en el caso dado puede asimismo obtenerse la serie (8), aplicando la fórmula para la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente. Tenemos (si $|z|<2$)

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\left[1+\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2+\ldots\right]=-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^k,$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots\right]=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k.$$

Por eso para nuestra función $c_k=\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{3^{k+1}}$.

En virtud de la unicidad del desarrollo de la función en la serie de potencias los números obtenidos c_k son iguales, respectivamente, a los números c_k calculados por la fórmula (9).

b) La función $f(z)$ es analítica en el anillo $2<|z|<3$. Por eso puede ser desarrollada en serie de Laurent

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k, \tag{10}$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{11}$$

donde γ es la circunferencia $|\zeta|=\rho$, $2<\rho<3$, orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Pero los números c_k

se pueden obtener sin recurrir a las complicadas fórmulas (11). Tenemos para $2 < |z| < 3$

$$\frac{1}{z-3} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}},$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left[1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\ldots\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}.$$

Por eso la serie de Laurent de la función $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}.$$

Debido a la unicidad del desarrollo en serie de Laurent los coeficientes obtenidos son iguales, respectivamente, a los números c_k determinados por las fórmulas (11).

c) La función $f(z)$ es analítica también en el exterior del círculo $|z| \leqslant 3$, o sea, para los valores de z que satisfacen la desigualdad $|z| > 3$ y posee la propiedad

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0. \tag{12}$$

Por eso $f(z)$ puede ser desarrollada en la serie de Laurent de la forma siguiente:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{z^k}. \tag{13}$$

Los términos cuya forma es $c_k z^k$ ($k = 0, 1, \ldots$) no pueden formar parte del desarrollo de Laurent de la función f, o sea, $c_k = 0$ para los k indicados. En el caso contrario esto contradiría la propiedad (12).

Aquí los números c_{-k} también pueden ser obtenidos directamente. Tenemos para $|z| > 3$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\left[1+\frac{3}{z}+\left(\frac{3}{z}\right)^2+\ldots\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{z^k},$$

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}.$$

Por eso

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1} - 2^{k-1}}{z^k}.$$

EJEMPLO 2. Es necesario desarrollar la función

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2} \tag{14}$$

en serie de Taylor por las potencias de $z-i$ y determinar el radio de convergencia de esta serie.

RESOLUCION. El círculo mayor, con el centro en el punto i, dentro del cual la función $f(z)$ es analítica tiene el radio igual a la distancia entre el punto i y su punto singular más próximo. Tal es, evidentemente, el punto $z=2$. Por consiguiente, el radio indicado es igual a

$$R=|2-i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

Designemos por σ el círculo abierto (sin frontera) de radio $R=\sqrt{5}$ que tiene por centro el punto i.

Dentro del círculo σ la función $f(z)$ es analítica y todo círculo concéntrico de mayor radio contiene el punto singular $z=2$ en el cual la analiticidad se altera.

En virtud del teorema 1 del § 6.9 la función $f(z)$ se desarrolla en serie de Taylor según las potencias de $z-i$. Es fácil de obtener esta serie efectivamente.

Tenemos

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-i)+(i-2)}=\frac{1}{\frac{z-i}{i-2}+1}\cdot\frac{1}{i-2}=$$

$$=\frac{1}{i-2}\left(1-\frac{z-i}{i-2}+\left(\frac{z-i}{i-2}\right)^2-\ldots\right), \tag{15}$$

y hemos obtenido la serie de potencias de $z-i$ convergente, evidenemente, en el círculo $|z-i|<R$, $R=|i-2|=\sqrt{5}$. Luego

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-i)+(i-3)}=\frac{1}{i-3}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{i-3}}=$$

$$=\frac{1}{i-3}\left(1-\frac{z-i}{i-3}+\left(\frac{z-i}{i-3}\right)^2-\ldots\right). \tag{16}$$

Hemos vuelto a obtener la serie de potencias de $z-i$ que asimismo converge en el círculo $|z-i|<R$. De hecho converge en el círculo de radio $|i-3|=\sqrt{10}$, pero esto no lo necesitaremos.

La diferencia entre las series (16) y (15) es el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Taylor según las potencias de $z-i$. El radio de convergencia de esta serie es igual a $R=\sqrt{5}$.

PROBLEMA. Desarrollar la función $f(z)$ (véase (14)) en serie de Laurent según las potenciás de $z-i$: a) en el anillo $\sqrt{5}<|z-i|<\sqrt{10}$ y b) en el entorno de $z=\infty$.

§ 6.11. Clasificación de puntos singulares aislados. Residuos

En el § 6.10 hemos demostrado el teorema 1 que afirma que si $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$ y la función $f(z)$ es analítica en el anillo

$$r < |z - z_0| < R,$$

entonces ésta se desarrolla en serie de Laurent que converge hacia ella

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = f_1(z) + f_2(z) \quad (r < |z - z_0| < R), \tag{1}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (|z - z_0| < R), \\ f_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} \qquad (|z - z_0| > r). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sea $r = 0$. Se supone, de este modo, que la función es analítica en el círculo abierto $0 < |z - z_0| < R$ del cual está excluido el punto z_0. En el mismo punto z_0 la función f suele quedar, con más frecuencia, no definida.

En este caso se dice que z_0 es un *punto singular aislado* de la función f. A continuación se dará la clasificación de puntos singulares aislados.

La serie de potencias

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (|z - z_0| < R)$$

tiene el radio de convergencia $R > 0$. Por eso su suma tiene la derivada continua en el círculo $|z - z_0| < R$.

Examinemos tres casos (para $r = 0$).

Caso a). La función $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{3}$$

o sea, todos los números $c_{-k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Puesto que la serie de potencias (3) converge para todos los valores de z con $|z - z_0| < R$, su radio de convergencia es igual a R y, por consiguiente (véase el § 6.9), su suma $f_1(z)$ está determinada y es continuamente derivable en todos los puntos del círculo $|z - z_0| < R$, incluyendo también el punto z_0. Ahora bien, la función $f_1(z)$ es analítica en este círculo.

Por eso, si se toma que

$$f(z_0) = f_1(z_0) = c_0,$$

entonces la función $f(z)$ asimismo será analítica en dicho círculo.

En este caso se dice que *la singularidad que tiene la función f en el punto z_0 es evitable*. Basta poner $f(z_0) = c_0$ para que la función f llegue a ser analítica no sólo en la proximidad del punto z_0 sino también en el mismo punto.

Observemos que en el caso dado la integral

$$\int_L f(z)\,dz = 0$$

para todo contorno cerrado L que contenga dentro el punto z_0 y pertenezca al círculo $|z - z_0| < R$.

Caso b). La función $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \quad (c_{-m} \neq 0). \tag{5}$$

Así, pues, $c_k = 0$ para $k = -(m+1), -(m+2), \ldots$.

En este caso se dice que el punto z_0 *es el polo de la función f (z) de orden (multiplicidad) m*. Cuando $m = 1$ el punto z_0 se llama, además, *polo simple*.

Puesto que

$$\lim_{z \to z_0} f_1(z) = c_0$$

y

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(z-z_0)^m} [c_{-m} + c_{-(m-1)}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1}] = \infty, \tag{6}$$

entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty. \tag{7}$$

Ahora si L es un contorno que esté orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj, contenga dentro z_0 y pertenezca al círculo $|z - z_0| < R$, entonces

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1}. \tag{8}$$

En efecto,

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L f_1(z)\,dz + \sum_{k=1}^{m} \int_L \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}\,dz = 0 + 2\pi i c_{-1},$$

porque

$$\int_L \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i, \quad \int_L \frac{dz}{(z-z_0)^k} = 0 \quad (k = 2, \ldots, m)$$

(véanse (10) y (11) del § 6.6).

Caso c). La función $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} = f_1(z) + f_2(z), \tag{9}$$

donde en la serie

$$f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

el número infinito de coeficientes c_{-k} no es igual a cero.

En este caso se dice que *la función $f(z)$ tiene en el punto z_0 una singularidad esencial.*

Sabemos que

$$\lim_{z \to z_0} f_1(z) = c_0.$$

No obstante a las condiciones indicadas $f_2(z)$ no tiende, cuando $z \to z_0$, hacia algún límite, finito o infinito. No tenemos la posibilidad de demostrar aquí este hecho y diremos solamente que se deduce del conocido teorema de Sojotski [1].

Observemos que los razonamientos aplicados para demostrar la igualdad (6) en el caso del polo en esta ocasión son inaplicables, porque para las sumas infinitas la operación del paso límite, término a término, no siempre es legítima.

EJEMPLO 1. La función $e^{-1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}$ tiene una singularidad esencial en el punto $z = 0$. Esta función no tiene límite en el punto $z = 0$.

En efecto, para $z = x$ (x es un número real) $\exp(-1/x^2) \to 0$, cuando $x \to 0$. Sin embargo, si $z = i/n$, entonces $\exp(-1/z^2) = \exp(n^2) \to +\infty$ para $n \to \infty$. Por lo tanto, la función $\exp(-1/z^2)$ no tiene límite en el punto $z = 0$.

[1] Yu. V. Sojotski (1842—1929), matemático ruso.

Para cualquier contorno L orientado en el sentido contrario a las agujas del reloj y perteneciente al círculo $|z - z_0| < R$ dentro del cual se contiene el punto z_0, al igual que en el caso del polo,

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1}. \tag{10}$$

El hecho consiste en que la integral sobre L en el caso dado (véase el § 6.6, observación 2) puede ser sustituida por la integral sobre cualquier circunferencia γ, orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj, que tenga por centro el punto z_0 y pertenezca al círculo $|z - z_0| < R$. Pero sobre la circunferencia γ las series (9) convergen uniformemente y, por consiguiente, se puede integrarlas término a termino a lo largo de γ. No obstante, como sabemos,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^k} = 0 \quad (k \neq 1) \quad \text{y} \quad \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i,$$

de donde se deduce la igualdad (10).

Ahora hagamos la siguiente definición: *sea z_0 un punto singular aislado de la función $f(z)$, es decir, sea la función $f(z)$ analítica en cierto círculo*

$$|z - z_0| < R$$

del cual queda excluido el punto z_0. Se llama residuo de la función f en el punto z_0 la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\,dz = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z), \tag{11}$$

donde L es el contorno en el círculo $|z - z_0| < R$ que está orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj y contiene el punto z_0.

En virtud de lo dicho anteriormente (véanse los casos a), b) y c)), *si*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \quad (0 < |z-z_0| < R)$$

es la serie de Laurent de f en el punto z_0, entonces

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} \tag{12}$$

Por eso, si se conoce el desarrollo de la función en la serie de Laurent, el residuo se encuentra fácilmente, en el caso de un punto singular cualquiera.

En particular, si z_0 es un punto singular evitable, entonces $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

A veces es difícil desarrollar la función $f(z)$ en serie de Laurent y por eso es necesario buscar otros métodos para calcular el residuo, sin desarrollar la función en serie de Laurent.

Sea $z = z_0$ el polo de orden $m \geqslant 1$. Entonces

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{m} c_{-k} (z - z_0)^{-k} \quad (c_{-m} \neq 0). \tag{13}$$

Multiplicando los miembros primero y segundo de (13) por $(z - z_0)^m$, tenemos

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+m}. \tag{14}$$

Si se deriva la igualdad (14) $(m - 1)$ veces, el término libre a la derecha será igual a $(m - 1)!\, c_{-1}$ y, por consiguiente,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}[(z - z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}} = (m - 1)!\, c_{-1},$$

de donde

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}[(z - z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}. \tag{15}$$

Si la función $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, donde $\varphi(z_0) \neq 0$ y $\psi(z)$ tiene un cero simple para $z = z_0$ ($\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$), entonces $z = z_0$ es un polo simple de $f(z)$. En virtud de la fórmula (15) (cuando $m = 1$) tenemos

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Ahora bien, en el caso dado

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{16}$$

Cuando $z = z_0$ es un punto singular esencial no tenemos sino que un único método de calcular el residuo, o sea, el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Laurent.

EJEMPLO 2. Hallar el residuo de la función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos z}$ en el punto $z = \pi/2$.

En el caso dado $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, donde $\varphi(z) = \operatorname{sen}^2 z$ y $\psi(z) = \cos z$. El punto $z = \pi/2$ es un polo simple de la función $f(z)$, ya que

$\varphi(\pi/2) = 1 \neq 0$, $\psi(\pi/2) = 0$, $\psi'(z) = -\operatorname{sen} z$, $\psi'(\pi/2) = -1 \neq 0$. Por lo tanto, por la fórmula (16) obtenemos

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi/2} f(z) = \frac{\varphi(\pi/2)}{\psi'(\pi/2)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

EJEMPLO 3. Hallar el residuo de la función $\exp(1/z)$ en el punto $z = 0$.

Tenemos

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \dots .$$

Ahora bien, el punto $z = 0$ es singular esencial y

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \exp\left(\frac{1}{z}\right) = c_{-1} = 1.$$

EJEMPLO 4. Hallar el residuo de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-3)}$$

respecto al punto $z = 2$.

El punto dado es el polo de segundo orden, por eso por la fórmula (15) tenemos

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\left[(z-2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\frac{1}{z-3} = \lim_{z\to 2} \frac{-1}{(z-3)^2} = -1.$$

§ 6.12. Clasificación de puntos singulares en el infinito

Supongamos ahora que en el teorema 1 del § 6.10 $z_0 = 0$ y $R = \infty$, mientras que r es un número no negativo cualquiera ($0 \leqslant r < \infty$). Entonces el teorema 1 reza: si la función $f(z)$ es analítica para todos los números complejos z que satisfagan la desigualdad

$$|z| > r, \tag{1}$$

entonces ésta puede ser desarrollada en serie de Laurent según las potencias de z:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = F_1(z) + F_2(z), \quad (|z| > r), \tag{2}$$

que es convergente para todos los valores de z con $|z| > r$. Aquí

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{-k}}{z^k}, \quad F_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k. \tag{3}$$

El conjunto (1) se llama *exterior del círculo* $|z| \leqslant r$. Es cómodo considerar que este conjunto es *el entorno de un punto infinitamente alejado* (punto ∞).

Ahora bien, añadimos formalmente al conjunto de los puntos (números) complejos un punto abstracto infinitamente alejado ($z = \infty$).

La función $f(z)$ es analítica en el entorno del punto $z = \infty$, excluyendo el mismo punto ∞ que es natural en el caso dado llamar *punto singular aislado de la función f*.

Según el comportamiento de la función $f(z)$ en el entorno del punto $z = \infty$ es lógico introducir la clasificación siguiente:

a) *La singularidad en el punto* $z = \infty$ *es evitable* si

$$c_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

o sea, si

$$f(z) = F_1(z) \quad (|z| > r).$$

En este caso

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} F_1(z) = c_0.$$

Es evidente asimismo que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} f(z)\, dz = -c_{-1},$$

donde L_- es el contorno arbitrario, orientado en el sentido de las agujas del reloj, que contiene dentro la circunferencia $|z| = r$

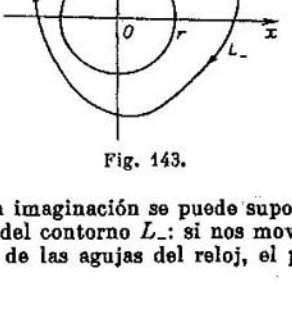

Fig. 143.

(fig. 143). Con cierta imaginación se puede suponer que el punto ∞ se encuentra dentro del contorno L_-: si nos movemos por el contorno L_- en el sentido de las agujas del reloj, el punto ∞ queda a la izquierda.

b) *El punto* $z = \infty$ *es el polo de orden* m si

$$f(z) = F_1(z) + \sum_{k=1}^{m} c_k z^k \quad (c_m \neq 0).$$

En este caso, evidentemente, $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$. Luego

$$\int_{L_-} f(z)\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} \int_{L_-} \frac{dz}{z^k} + \sum_{k=1}^{m} c_k \int_{L_-} z^k\, dz = -c_{-1} \int_{L} \frac{dz}{z} = -2\pi i c_{-1},$$

porque

$$\int_{L_-} z^k\, dz = -\int_{L} z^k\, dz = 0 \quad (k \neq -1).$$

c) *El punto* $z = \infty$ *es un punto singular esencial* si

$$f(z) = F_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \tag{4}$$

y hay un conjunto infinito de los números c_k no iguales a cero.

La función $F_1(z)$ tiende al límite finito cuando $z \to \infty$, mientras que la función $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$, en virtud del teorema de Sojotski, no tiende a ningún límite para $z \to \infty$. Por eso la función $f(z)$ tampoco tiende hacia un límite cuando $z \to \infty$.

Luego

$$\int_{L_-} f(z)\, dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{L_-} z^k\, dz = -2\pi i c_{-1}.$$

Aquí la integración término a término es legítima, puesto que, como sabemos, las integrales $\int_{L_-}$ se pueden sustituir por las integrales $\int_{C}$ sobre la circunferencia de radio $\rho > r$ en la cual la serie (4) converge uniformemente.

Formulemos la definición.

Se llama residuo de la función $f(z)$ *en un punto infinitamente alejado*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} f(z)\, dz = \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z),$$

donde L_- *es un contorno cerrado arbitrario, orientado en el sentido de las agujas del reloj y perteneciente al conjunto* $|z| > r$ (¡donde la función

$f(z)$ es analítica). En el caso dado se dice que al movernos por el contorno en el sentido de las agujas del reloj «el punto ∞ queda a la izquierda».

En virtud de lo dicho (véanse a), b) y c)), *si*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad (|z|>r),$$

es la serie de Laurent de la función f en el exterior de la circunferencia $|z|=r$, entonces

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Si $z=\infty$ es un punto singular evitable, en la serie de Laurent de la función $f(z)$ faltan las potencias positivas de z, mientras que z^{-1} puede estar presente, por eso en este caso $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ no obligatoriamente es igual a cero.

EJEMPLO 1. La función

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-1-2n} \quad (|z|>1)$$

tiene la singularidad evitable en el punto $z=\infty$ y $c_{-1}=1$, por lo tanto,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1.$$

§ 6.13. Teorema de los residuos

TEOREMA 1. *Sea la función $f(z)$ analítica sobre todo el plano z, a excepción de un número finito de puntos $z_1, \ldots, z_N$. Entonces tiene lugar la igualdad*

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN. Construyamos las circunferencias γ_1^-, γ_2^-, ..., γ_N^-, orientadas en el sentido de las agujas del reloj, que tengan por centros $z_1, z_2, \ldots, z_N$, respectivamente, y sean de un radio tan pequeño que no se intersequen.

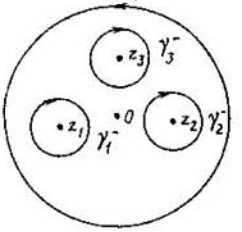

Fig. 144.

Vamos a construir, además la circunferencia Γ, orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj, que tenga por centro el punto nulo y un radio tan grande que las circunferencias $\gamma_1^-, \ldots, \gamma_N^-$ resulten dentro de Γ (fig. 144). El contorno compuesto $L = \gamma_1^- + \gamma_2^- + \ldots + \gamma_N^- + \Gamma$ limita la región Ω dentro de la cual la función $f(z)$ es analítica. Es analítica asimismo sobre L. Además, al recorrer L, la región Ω queda a la izquierda.

Pero entonces, en virtud del teorema de Cauchy para un contorno compuesto,

$$\int_{\gamma_1^-} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_N^-} f(z)\,dz + \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \qquad (2)$$

o bien, si multiplicamos el primer miembro de esta igualdad por $-1/2\pi i$, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_N} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(z)\,dz = 0.$$

o sea,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \ldots + \operatorname*{Res}_{z=z_N} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Hay que tener en cuenta que dentro de cada uno de los contornos γ_k hay un solo punto singular z_k y fuera de Γ hay un solo punto singular $z = \infty$. El teorema queda demostrado.

La aplicación de este teorema se reduce a lo siguiente. Si es dificultoso calcular una de las integrales que forma parte de (2), entonces se puede procurar realizar el cálculo del resto de las integrales que forman parte de (2) y obtener la integral buscada de (2).

El mismo cálculo de estas integrales se reduce al desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Laurent en el entorno de los puntos singulares correspondientes. En realidad, tampoco es necesario saber estos desarrollos por completo. Basta sólo conocer los términos que tienen la forma $c_{-1}/(z - z_k)$ en estos desarrollos para llegar al objetivo.

§ 6.14. Cálculo de integrales con ayuda de los residuos

Sea la función $f(z)$ analítica en el semiplano superior, incluyendo el eje real, salvo un número finito de los puntos singulares $a_1, a_2, \ldots, a_N$ que están en el semiplano indicado. Examinemos para estas condiciones los métodos de cálculo de las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ix}\,dx.$$

TEOREMA 1. *Supongamos que la función $f(z)$ satisface las condiciones citadas y, además, $|f(z)| \leqslant M/|z|^m$ cuando $|z| \geqslant R$, donde $m \geqslant 2$ y R es un número lo bastante grande. Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z). \tag{1}$$

DEMOSTRACION. Describamos la semicircunferencia L (orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj) de radio R y con

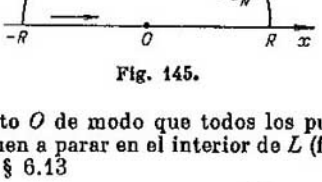

Fig. 145.

el centro en el punto O de modo que todos los puntos singulares de la función $f(z)$ lleguen a parar en el interior de L (fig. 145). En virtud del teorema 1 del § 6.13

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{L} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z). \tag{2}$$

Como $|f(z)| \leqslant M/|z|^m$ para $|z| \geqslant R$, entonces

$$\left|\int_{L} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{M}{R^m}\pi R = \frac{\pi M}{R^{m-1}} \to 0, \quad R \to \infty \quad (m-1 \geqslant 1).$$

Pasando al límite en la igualdad (2) cuando $R \to \infty$, obtenemos (1).

EJEMPLO 1. Calcular la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

La función $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$ es analítica en el semiplano superior a excepción de los puntos

$$a_1=e^{\pi i/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad a_2=e^{3\pi i/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$$

en los cuales los polos son simples. Además, $|f(z)|\leqslant 1/|z|^4$ $(m=4>2)$. Hallemos los residuos de la función $f(z)$ en los puntos a_1 y a_2. Según la fórmula (16) del § 6.11.

$$\operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)=\frac{1}{\psi'(a_j)},\quad (j=1,\ 2),$$

donde $\psi(z)=1+z^4$. Tenemos $\psi'(z)=4z^3$, $\psi'(a_1)=4e^{3\pi i/4}=$ $=-4e^{-\pi i/4}\neq 0$, $\psi'(a_2)=4e^{i\pi i/4}=4e^{i\pi/4}\neq 0$, de donde

$$\operatorname*{Res}_{z=a_1} f(z)=-\frac{1}{4}e^{i\pi/4},\quad \operatorname*{Res}_{z=a_2} f(z)=\frac{1}{4}e^{-i\pi/4}.$$

A base de la fórmula (1) obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{2\pi i}{4}\left(-e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4}\right)=$$

$$=\pi\frac{e^{i\pi/4}-e^{-i\pi/4}}{2i}=\pi\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

TEOREMA 2. *Supongamos que la función $f(z)$ satisface las condiciones indicadas al principio del párrafo y* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ *uniformemente respecto a* $\arg z=\psi$. *Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ix}\,dx=2\pi i\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)\,e^{iz}. \tag{3}$$

DEMOSTRACION. Lo mismo que al demostrar el teorema 1 tenemos

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,e^{ix}\,dx+\int_{L} f(z)\,e^{iz}\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)\,e^{iz} \tag{4}$$

(la función $f(z)\,e^{iz}$ tiene las mismas particularidades que $f(z)$).

Debemos demostrar que cuando $R\to\infty$ la integral $\int\limits_L f(z)\,e^{iz}\,dz$ tiende a cero. Tenemos

$$A=\left|\int_L f(z)\,e^{iz}\,dz\right|=\left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\varphi})\,e^{-R\operatorname{sen}\varphi}e^{iR\cos\varphi}iRe^{i\varphi}\,d\varphi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{\pi}|f(Re^{i\varphi})|\,e^{-R\operatorname{sen}\varphi}R\,d\varphi.$$

En virtud de la condición del teorema $|f(Re^{i\varphi})| \leqslant \varepsilon$ cuando $R > N_1$ para todos los valores de φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$. Por eso (sen $\varphi > 2\varphi/\pi$ cuando $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$)

$$\Lambda \leqslant \varepsilon \int_0^{\pi} Re^{-R \operatorname{sen} \varphi}\, d\varphi = 2\varepsilon \int_0^{\pi/2} Re^{-R \operatorname{sen} \varphi}\, d\varphi \leqslant 2\varepsilon \int_0^{\pi/2} Re^{-2R\varphi/\pi}\, d\varphi =$$

$$= \left(\frac{2R}{\pi}\varphi = t\right) = \varepsilon\pi \int_0^{R} e^{-t}\, dt = \pi\varepsilon\,(1 - e^{-R}) < \pi\varepsilon \quad (R > N_1).$$

Pasando al límite en (4), para $R \to \infty$ obtenemos (3).

Si la función $f(z)$ tiene singularidades sobre el eje real, entonces aplicando una construcción especial del contorno de integración se pueden calcular las integrales respectivas si éstas existen.

EJEMPLO 2. Sea $f(z) = 1/z$. Esta función tiene el polo simple sobre el eje real en el punto $z = 0$. Luego, $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$ uniformemente respecto a $\arg z = \varphi$.

Construyamos el contorno de integración según se indica en la fig. 146. El recorrido del contorno se lleva a cabo según las flechas

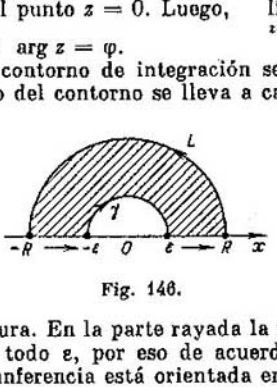

Fig. 146.

señaladas en esta figura. En la parte rayada la función e^{iz}/z es analítica para todo R y todo ε, por eso de acuerdo con el teorema de Cauchy (la semicircunferencia está orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj)

$$\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right) \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_L \frac{e^{iz}}{z}\, dz - \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0. \tag{5}$$

Al igual que anteriormente, es fácil demostrar que $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_L z^{-1} e^{iz}\, dz = 0$.

Luego

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\gamma e^{iz} \frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi}\, d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} =$$

$$= i \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)}\, d\varphi = i \int_0^{\pi} d\varphi = \pi i.$$

Ahora bien, la igualdad (5) en el límite, cuando $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$, toma la forma

$$\pi i = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} \right) \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} 2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2xi}\, dx = 2i \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx,$$

o sea,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Puesto que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es par, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \pi.$$

Observación 1. Si bajo el signo integral se encuentra el factor sen x o cos x, con frecuencia resulta más cómodo examinar la integral de la función sustituyendo sen x o cos x por e^{iz}. Esto se explica por el hecho de que $|\operatorname{sen} z|$ y $|\cos z|$ crecen indefinidamente cuando $z \to \infty$, mientras que $|e^{iz}| = e^{-y} \to 0$ cuando $y \to \infty$ $(y > 0)$. Por eso, en general, el comportamiento de la función $f(z) \left\{ \begin{matrix} \operatorname{sen} z \\ \cos z \end{matrix} \right\}$ será otro que el de la función $f(z)$. Luego, una vez obtenido el valor de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$, al separar las partes real e imaginaria, encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x\, dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} x\, dx.$$

EJEMPLO 3. Calcular la integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha x\, dx}{a^2 + x^2} \quad (\alpha,\ a > 0).$$

Examinemos la función $e^{i\alpha z}/(a^2 + z^2)$. Esta función es analítica en el semiplano superior, a excepción del punto $z = ai$. La función $f(z) = 1/(a^2 + z^2) \to 0$ cuando $z \to \infty$ uniformemente respecto a $\arg z = \varphi$. Por eso según el teorema 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{a^2 + x^2}\, dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{e^{i\alpha z}}{a^2 + z^2} = 2\pi i \frac{e^{i\alpha ai}}{2ai} = \frac{\pi}{a}\, e^{-\alpha a}.$$

Separando la parte real, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{a}\,e^{-\alpha a}, \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\,e^{-\alpha a}.$$

EJEMPLO 4. Calcular la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}\,dx.$$

Tenemos

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{2(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}e^{-2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\,e^{-2} = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$$

Así, pues,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2}).$$

EJEMPLO 5.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x\,dx}{1+x^2} = \int_0^{\infty} \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}(1-e^{-2}) = \frac{\pi}{4}(1+e^{-2}).$$

EJEMPLO 6. Calcular las integrales de Fresnel[1])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx.$$

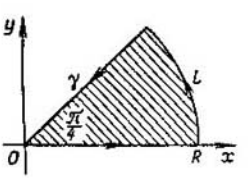

Fig. 147.

Examinemos la función e^{iz^2}. Dentro de la región rayada (fig. 147) esta función es analítica, por eso según el teorema de Cauchy

$$\int_0^R e^{ix^2}\,dx + \int_L e^{iz^2}\,dz + \int_\gamma e^{iz^2}\,dz = 0,$$

[1]) A. J. Fresnel (1788—1827), físico francés.

donde L es una parte de la circunferencia $|z| = R$ y γ es el segmento de la recta $z = \rho e^{i\pi/4}$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$ (orientados por las flechas). Luego

$$\int_\gamma e^{iz^2}\,dz = \int_R^0 e^{i\rho^2} e^{i\pi/4}\,d\rho = -e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-\rho^2}\,d\rho \to -e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-\rho^2}\,d\rho;$$

$$\left|\int_L e^{iz^2}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi/4} e^{i(Re^{i\varphi})^2} Rie^{i\varphi}\,d\varphi\right| =$$

$$= \left|\int_0^{\pi/4} Rie^{i\varphi} e^{iR^2\cos 2\varphi} e^{-R^2 \operatorname{sen} 2\varphi}\,d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi/4} Re^{-R^2 \operatorname{sen} 2\varphi}\,d\varphi \leqslant R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\frac{4\varphi}{\pi}}\,d\varphi \leqslant \frac{c}{R}\int_0^\infty e^{-t}\,dt \to 0, \quad R \to \infty.$$

Por lo tanto, en el límite para $R \to \infty$ obtenemos (véase el § 2.13, ejemplo 3)

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-\rho^2}\,d\rho = e^{\pi i/4}\sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

Separando las partes real e imaginaria, tenemos

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{4}},$$

o sea,

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

§ 6.15. Función lineal. Función lineal fraccional

Función lineal entera. Vamos a examinar las funciones

$$w = z + c, \tag{1}$$

$$w = rz, \tag{2}$$

$$w = e^{i\theta}z, \tag{3}$$

donde c es un número complejo constante, $r > 0$ y θ, un número real arbitrario.

Las tres funciones (1), (2) y (3) aplican el plano z sobre todo el plano w.

La función (1) lleva a cabo el desplazamiento del plano z en el vector c (fig. 148).

La función (2) ($r > 0$) realiza el estiramiento (cuando $r > 1$) y la contracción (cuando $r < 1$) del plano z r veces: $|w| = r|z|$, $\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z$. La fig. 149 muestra el caso cuando $r > 1$.

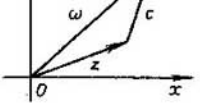

Fig. 148.

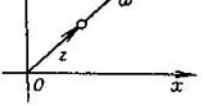

Fig. 149.

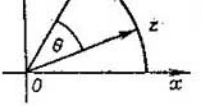

Fig. 150.

La función (3) expresa el giro del plano z alrededor del punto nul en el ángulo θ (fig. 150).

Las funciones (1), (2) y (3) tienen respectivamente las derivada

$$w' = 1, \quad w' = r, \quad w' = e^{i\theta},$$

no iguales a cero, y por eso realizan aplicaciones conformes.

Estas tres funciones son casos particulares de una *función linea* entera más general

$$w = az + b, \quad (a \neq 0), \tag{4}$$

donde a y b son los números complejos constantes.

La aplicación realizada por ella se puede escribir en la form

$$w = a(z + c) = re^{i\theta}(z + c),$$

donde $c = b/a$, $a = re^{i\theta}$.

De aquí se desprende que se reduce a (1), (2) y (3):

$$w = ru, \quad u = e^{i\theta}v, \quad v = z + c.$$

En otras palabras, la transformación del plano z efectuada por l función (4) se reduce a la traslación (en el vector c), luego al gir del plano (en el ángulo θ) y luego al estiramiento o contracció del plano r veces.

Función $w = \frac{1}{z}$. Suponiendo $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\Phi}$, tenemos

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \theta = -\varphi, \tag{5}$$

donde la segunda igualdad se toma con una exactitud hasta $2k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

De aquí se ve que la circunferencia $|z| = 1$ pasa a sí misma, o más exactamente, cada uno de sus puntos pasa a un punto simétrico respecto al eje real.

Observemos que si la circunferencia $|z| = 1$ es recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj, la circunferencia aplicada $|w| = 1$ es recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

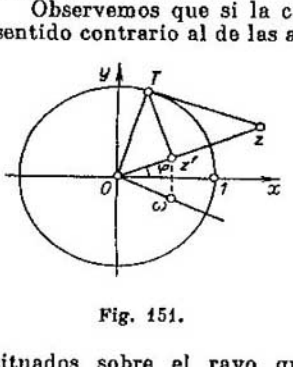

Fig. 151.

Es cómodo dividir la transformación (5) en dos transformaciones:

$$r' = \frac{1}{r}, \quad \varphi' = \varphi; \tag{6}$$

$$\rho = r', \quad \theta = -\varphi'. \tag{7}$$

La transformación (6) se llama *inversión* respecto a la circunferencia unidad.

En la inversión respecto a la circunferencia unidad los puntos z y z' situados sobre el rayo que constituye el ángulo φ con el eje x pasan a los puntos que están sobre este mismo rayo y además de modo que

$$rr' = 1.$$

La construcción del punto $z' = r'e^{i\varphi}$ según el punto conocido $z = re^{i\varphi}$ está representada en la fig. 151 donde se examina el caso cuando z se halla fuera de la circunferencia $|z| = 1$. Del punto z trazamos la tangente a la circunferencia $|z| = 1$, T es el punto de tangencia, $Tz' \perp Oz$. De la semejanza de los triángulos ($\Delta OTz'$ y ΔOTz)

$$\frac{OT}{r'} = \frac{r}{OT}, \quad OT = 1, \quad rr' = 1.$$

Si el punto z se encuentra dentro de la circunferencia $|z| = 1$, levantamos de este punto la perpendicular a Oz hasta la intersección con la circunferencia en el punto T. Por este punto trazamos la tangente a la circunferencia hasta la intersección con el rayo Oz. El punto de intersección será precisamente el punto z'.

Los puntos z y z' se llaman *recíprocamente simétricos respecto a la circunferencia* $|z| = 1$.

Aplicando ahora (según (7)) el punto z' especularmente respecto al eje real, obtenemos el punto

$$w = r'e^{-i\varphi} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{z}.$$

De la fórmula $w = 1/z$ se ve que cuando $z \to 0$ el punto w tiene un módulo indefinidamente creciente, por eso es cómodo considerar que con ayuda de esta fórmula al punto $z = 0$ le corresponde un

«punto infinitamente alejado» que se designa por el símbolo $w = \infty$.

Así, pues, la función $w = 1/z$ aplica el plano z sobre el plano w con ayuda de la inversión respecto a la circunferencia $|z| = 1$ y de la aplicación especular respecto al eje x. Además, el punto $z = 0$ pasa al punto $w = \infty$ y el punto $z = \infty$ al punto $w = 0$.

Luego $w' = \frac{-1}{z^2} \neq 0$ para cualesquiera z con $|z| > 0$, por eso la aplicación con ayuda de la función $w = 1/z$ ($|z| > 0$) es conforme.

Función lineal fraccional

$$w = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{8}$$

Suponemos que $ad - bc \neq 0$. Es evidente que el punto $z = -d/c$ ($c \neq 0$) pasa al punto $w = \infty$.

La función w, separando su parte entera, puede representarse en la forma

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}, \tag{9}$$

de donde se ve que

$$w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad (cz+d \neq 0),$$

o sea, la aplicación con ayuda de la función (8) es conforme.

De la igualdad (9) se desprende que la aplicación dada se compone de las aplicaciones anteriormente examinadas:

$$z' = cz + d, \quad z'' = 1/z', \quad w = Az'' + B.$$

Si consideramos la línea recta como circunferencia de un radio infinito, entonces en la transformación (9) la circunferencia pasa a la circunferencia (*propiedad circular*).

De las consideraciones geométricas queda claro que debido a la traslación paralela, estiramiento y giro la circunferencia pasa a la circunferencia. Además, el interior de la circunferencia que se aplica pasa al interior de la circunferencia aplicada. Por eso es suficiente comprobar la propiedad circular para la transformación $w = 1/z$. Como sabemos, la ecuación de la circunferencia en el plano xOy tiene la forma

$$A(x^2 + y^2) + mx + ny + l = 0,$$

o bien

$$Az\bar{z} + m\frac{z+\bar{z}}{2} + n\frac{z-\bar{z}}{2i} + l = 0 \quad (z = x+iy, \ \bar{z} = x-iy),$$

o bien

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + l = 0 \quad \left(B = \frac{m+in}{2}\right). \tag{10}$$

En el caso examinado $z = 1/w$, $\bar{z} = 1/\bar{w}$. Por lo tanto, la ecuación (10) se transforma en la ecuación

$$A\frac{1}{w\bar{w}} + \frac{\bar{B}}{w} + \frac{B}{\bar{w}} + l = 0$$

o en la ecuación $A + \bar{B}w + B\bar{w} + lw\bar{w} = 0$

lo cual describe cierta circunferencia en el plano w.

En particular, para $l = 0$ obtenemos una línea recta, o sea, la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas en el plano z se transforma en recta en el plano w.

Observemos que la aplicación con ayuda de la función (9) puede hacer pasar el interior de la circunferencia que se aplica tanto al interior como al exterior de la circunferencia aplicada.

En principio, la función (9) depende de tres parámetros en calidad de los cuales se puede tomar la relación de los números a, b, c, d respecto a uno de ellos (desigual a cero).

Por eso para determinar la transformación (9) es necesario prefijar tres condiciones. Por regla general, se dan tres pares de los puntos correspondientes:

$$w_k = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz_k + d)} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Es fácil calcular que

$$w - w_k = \frac{(ad - bc)(z - z_k)}{(cz + d)(cz_k + d)}, \quad w_k - w_j = \frac{(ad - bc)(z_k - z_j)}{(cz_k + d)(cz_j + d)}.$$

De aquí $\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$. (11)

Esta es precisamente la transformación (9) que hace pasar los puntos z_k a w_k $(k = 1, 2, 3)$.

Supongamos que están dadas las circunferencias Γ y Γ' en los planos z y w, respectivamente. Es necesario hallar la aplicación lineal fraccional que hace pasar Γ a Γ' y el interior de Γ al de Γ'.

Asignemos sobre Γ y Γ' las tripletas arbitrarias respectivas de los puntos $\{z_1, z_2, z_3\}$ y $\{w_1, w_2, w_3\}$ que siguen en el sentido positivo, o sea, en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Entonces la transformación (11) será precisamente la solución del problema planteado.

En efecto, aplica los puntos z_k en los puntos w_k $(k = 1, 2, 3)$, respectivamente, y, evidentemente, la circunferencia Γ sobre Γ' (en virtud de la propiedad circular).

El hecho de que en el caso dado el interior de Γ pasa al interior de Γ' se deduce de la conformidad de la aplicación realizada por la función lineal fraccional.

En el caso dado las circunferencias Γ y Γ' tienen la orientación positiva (son recorridas en el sentido contrario al de las agujas del reloj). En virtud de la conformidad de la aplicación la normal interior a la Γ (por ejemplo, en el punto z_1) se transforma en el arco de la circunferencia (perpendicular a Γ' en el punto w_1) situada dentro de Γ' lo cual asegura la aplicación del interior de Γ sobre el interior de Γ'.

No obstante, si es necesario hallar una transformación lineal fraccional que aplique Γ sobre Γ' y el interior de Γ sobre el exterior

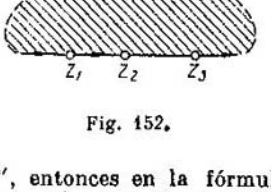

Fig. 152.

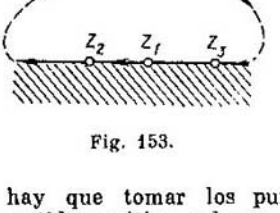

Fig. 153.

de Γ', entonces en la fórmula (11) hay que tomar los puntos $\{z_1, z_2, z_3\}$ sobre Γ orientados en el sentido positivo y los puntos $\{w_1, w_2, w_3\}$ sobre Γ' orientados en el sentido negativo.

Estas conclusiones conciernen también al caso cuando ora Γ, ora Γ', ora Γ y Γ' al mismo tiempo son las rectas. Sin embargo, es preciso explicar qué es lo que debe entenderse por interior de la recta Γ si lleva marcados los puntos $\{z_1, z_2, z_3\}$.

Si se trata de la fig. 152 esto es el semiplano superior y si se trata de la fig. 153, el semiplano inferior.

Si la recta Γ está completada por el punto ∞, se puede imaginarla como una circunferencia continua (véanse las figs. 152 y 153) de radio infinito.

Vamos a movernos por Γ (posiblemente, a través de un punto infinitamente alejado) de z_1 a z_2 en un sentido tal que el arco z_1z_2 no contenga z_3. De este modo el sentido de recorrido sobre Γ queda determinado y entonces se llama interior de Γ la región situada a la izquierda de Γ cuando nos movemos en esta dirección. En realidad es el semiplano superior o inferior el que hace las veces de esta región.

PROBLEMAS.

1. Hallar una transformación lineal fraccional que aplique el interior del círculo unidad sobre el semiplano superior de modo que los puntos $z_1 = +1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ pasen a los puntos $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ y $w_3 = 2$, respectivamente.

2. Escribir una transformación lineal fraccional del semiplano superior en sí mismo con la cual los puntos $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ pasen a los puntos $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ y $w_3 = 3$, respectivamente.

Capítulo 7

Cálculo operacional

§ 7.1. Transformada de Laplace

En este capítulo examinaremos, por regla general, las funciones $f(t)$ de una variable real t, dadas sobre $[0, \infty)$. A veces consideraremos que $f(t)$ está definida sobre $(-\infty, \infty)$, pero para $t < 0$ la función $f(t) \equiv 0$. Además, supondremos que la función $f(t)$ es continua a trozos y sobre cada intervalo finito tiene un número finito de los

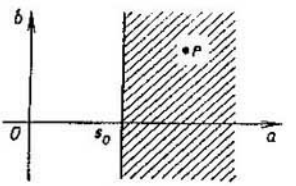

Fig. 154.

puntos de discontinuidad de primer orden. Sea $p = a + ib$ un número complejo.

Examinemos la función

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Si

$$|f(t)| \leqslant M \exp(s_0 t), \tag{2}$$

donde $a > s_0$, la función $F(p)$ es analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > s_0$ (fig. 154).

En efecto,

$$|F'(p)| = \left| \int_0^\infty t \exp(-at - ibt) f(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^\infty t \exp(-at) |f(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \exp(-at) \cdot tM \exp(s_0 t)\, dt = M \int_0^\infty t \exp(-(a - s_0) t)\, dt < \infty, \tag{3}$$

ya que $a > s_0$. La legitimidad de la derivación respecto a p bajo el signo integral se deduce de la desigualdad (3) y del hecho de que

la función $tf(t) \exp(-pt)$ es continua a trozos (véase el § 2.15 teorema 2).

La función $F(p)$ se llama *transformada de Laplace* de la función $f(t)$, *L-transformada* o *transformación de Laplace*.

Vamos a emplear las designaciones siguientes:

$$F(p) = L(f(t);\ p),\quad f(t) \doteq F(p),\quad F(p) \doteqdot f(t).$$

En este caso la función $f(t)$ se denomina *función inicial* u *original*. El número s_0 ($s_0 = s_0(f)$) se llama *índice de crecimiento de la función* $f(t)$ (a continuación, si no se menciona especialmente, supondremos que el índice de crecimiento de f es igual a s_0).

La determinación de la transformada para el original dado y a revés la determinación del original para la transformada conocida se denomina *cálculo operacional* cuyo comienzo dio Heaviside [1]). Al elaborar el cálculo operacional Heaviside no lo fundamentó. Notemos que examinó la transformación

$$\overline{F}(p) = p\int_0^\infty \exp(-pt) f(t)\, dt,$$

o sea, $\overline{F}(p) = pF(p)$.

En algunos problemas es cómoda la transformación de Laplace y en otros, la de Heaviside. Nosotros examinaremos la transformación de Laplace.

La argumentación del cálculo operacional fue dada en los años veinte de nuestro siglo en los trabajos de varios matemáticos.

TEOREMA 1 (DE UNICIDAD). *Si dos funciones continuas $f(t)$ y $g(t)$ tienen una misma L-transformada $F(p)$, ellas son idénticamente iguales.*

No demostraremos este teorema.

En virtud del teorema 1 podemos decir que para una función continua $f(t)$, no igual idénticamente a cero, la transformada no puede ser una función periódica.

En efecto, si $\forall p F(p) = F(p + \omega)$, donde $\omega \neq 0$, entonces

$$\int_0^\infty \exp(-pt) f(t)\, dt = \int_0^\infty \exp(-(p+\omega)t) f(t)\, dt.$$

Según el teorema 1

$$f(t) = \exp(-\omega t) f(t),$$

o sea, $\exp(-\omega t) \equiv 1$ ($\omega \neq 0$) lo que no puede ser.

[1]) O. Heaviside (1850—1925), ingeniero-electricista inglés.

§ 7.2. Transformada de funciones elementales y propiedades de las transformadas

Se llama *función unidad o función de Heaviside* la función

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Es evidente que el índice de crecimiento de esta función es $s_0 = 0$. Hallemos la L-transformada de esta función en la región $\operatorname{Re} p > 0$:

$$L(\sigma_0(t);\ p) = \int_0^\infty \exp(-pt)\,dt = -\frac{1}{p}\exp(-pt)\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Ahora bien,

$$\sigma_0(t) \doteq \frac{1}{p}. \tag{1}$$

Análogamente, para la función $f(t) = \cos t$, integrando por partes, encontramos

$$L(\cos t;\ p) = \int_0^\infty \exp(-pt)\cos t\,dt = \{\exp(-pt) = u,\ \cos t\,dt = dv\} =$$

$$= \exp(-pt)\operatorname{sen} t\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty \exp(-pt)\operatorname{sen} t\,dt =$$

$$= p\int_0^\infty \exp(-pt)\operatorname{sen} t\,dt = p\Big[-\exp(-pt)\cos t\Big|_0^\infty -$$

$$- p\int_0^\infty \exp(-pt)\cos t\,dt\Big] = p - p^2 L[\cos t;\ p].$$

De aquí

$$L(\cos t;\ p) = \frac{p}{1+p^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0),$$

o sea,

$$\cos t \doteq \frac{p}{1+p^2}. \tag{2}$$

De paso hemos demostrado que

$$L(\cos t;\ p) = pL(\operatorname{sen} t;\ p),$$

de donde

$$\operatorname{sen} t \doteqdot \frac{1}{1+p^2}. \tag{3}$$

TEOREMA 1 (DE SEMEJANZA). *Si* $f(t) \doteqdot F(p)$, *entonces* $f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ $(\alpha > 0)$, $\operatorname{Re} p > \max\{s_0, \alpha s_0\}$.

En efecto.

$$L[f(\alpha t);\ p] = \int_0^\infty \exp(-pt) f(\alpha t)\, dt = \left\{\alpha t = u,\ dt = \frac{du}{\alpha}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p}{\alpha} u\right) f(u)\, du = \frac{1}{\alpha} L\left[f(u);\ \frac{p}{\alpha}\right].$$

En virtud del teorema 1 obtenemos

$$\cos \alpha t \doteqdot \frac{1}{\alpha} \frac{p/\alpha}{1+(p/\alpha)^2} = \frac{p}{p^2+\alpha^2}; \tag{4}$$

$$\operatorname{sen} \alpha t \doteqdot \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1+(p/\alpha)^2} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}. \tag{5}$$

TEOREMA 2 (PROPIEDAD DE LINEALIDAD). *Tiene lugar la igualdad*

$$L[Af(t) + Bg(t);\ p] = AL[f(t);\ p] + BL[g(t);\ p],$$

donde A y B son los números constantes.

Esta propiedad se deduce de la propiedad correspondiente de una integral impropia. Notemos que si los índices de crecimiento de las funciones f y g son iguales a s_0 y $\bar{s}_0$, respectivamente, entonces la transformada $Af + Bg$ existe en el semiplano $\operatorname{Re} p > \max\{s_0, \bar{s}_0\}$.

EJEMPLO 1. Hallar la transformada de la función

$$f(t) = 3\sigma_0(t) + 2\cos 3t.$$

En virtud de (1), (4) y del teorema (2) tenemos

$$L[f(t);\ p] = 3L[\sigma_0(t);\ p] + 2L[\cos 3t;\ p] = \frac{3}{p} + 2\frac{p}{p^2+9}.$$

EJEMPLO 2. Hallar el original de la transformada

$$F(p) = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2+16}.$$

Representemos la transformada $F(p)$ en la forma

$$F(p) = 2 \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{4}{p^2+4^2}.$$

Tenemos

$$\frac{1}{p} \doteqdot \sigma_0(t), \quad \frac{4}{p^2+4^2} \doteqdot \operatorname{sen} 4t.$$

Por consiguiente, el original (según el teorema 1 del § 7.1)

$$f(t) = 2\sigma_0(t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t.$$

TEOREMA 3 (DESPLAZAMIENTO DE LA TRANSFORMADA).

$$L[f(t)\exp(-\alpha t);\ p] = L[f(t);\ p+\alpha], \quad \operatorname{Re}(p+\alpha) > s_0.$$

La demostración es evidente.

EJEMPLO 3. Hallar la transformada de las funciones $e^{-\alpha t}\cos\beta t$, $e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$, $e^{-\alpha t}$.

Puesto que

$$\cos\beta t \doteq \frac{p}{p^2+\beta^2},$$

entonces según el teorema 3

$$L[\exp(-\alpha t)\cos\beta t;\ p] = \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}. \tag{6}$$

Análogamente, utilizando las fórmulas (5) y (1), tenemos

$$L[\exp(-\alpha t)\operatorname{sen}\beta t;\ p] = \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}, \tag{7}$$

$$L[\exp(-\alpha t);\ p] = L[\sigma_0(t);\ p+\alpha] = \frac{1}{p+\alpha}. \tag{8}$$

EJEMPLO 4. Hallar $L[\operatorname{ch}\alpha t;\ p]$, $L[\operatorname{sh}\alpha t;\ p]$.

Utilizando el teorema 2 y la igualdad (8), tenemos

$$L[\operatorname{ch}\alpha t;\ p] = L\left[\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2};\ p\right] = \frac{1}{2}L[e^{\alpha t};\ p] + \frac{1}{2}L[e^{-\alpha t};\ p] =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+\alpha} = \frac{p}{p^2-\alpha^2}.$$

Análogamente,

$$L[\operatorname{sh}\alpha t;\ p] = \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}.$$

EJEMPLO 5. Hallar el original para la transformada $F(p) = 1/(p^2+2p+5)$.

tenemos

$$F(p) = \frac{2}{2[(p+1)^2+2^2]}, \quad \frac{2}{p^2+2^2} \doteq \operatorname{sen} 2t,$$

$$\frac{2}{(p+1)^2+2^2} \doteq e^{-t}\operatorname{sen} 2t, \quad f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t.$$

TEOREMA 4 (DERIVACIÓN DE UNA TRANSFORMADA).

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} L[f(t);\ p] = L[t^n f(t);\ p].$$

DEMOSTRACIÓN. Si Re $p > s_0$, donde s_0 es el índice de crecimient de la función $f(t)$, entonces la integral

$$\int_0^\infty t^n f(t) \exp(-pt)\, dt$$

existe para todo valor de $n = 1, 2, \ldots$. Luego, es evidente qu

$$\frac{d^n}{dp^n} \int_0^\infty \exp(-pt) f(t)\, dt = \int_0^\infty (-t)^n \exp(-pt) f(t)\, dt,$$

de donde

$$(-1)^n L[f(t) t^n;\ p] = \frac{d^n}{dp^n} L[f(t);\ p].$$

EJEMPLO 6. Por cuanto $\frac{1}{p} \doteqdot \sigma_0(t)$, entonces en virtud d teorema 4 obtenemos

$$(-1) \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot 1 \cdot t,$$

o sea,

$$t \doteqdot \frac{1}{p^2}.$$

Continuando la derivación, obtenemos

$$t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si n no es un número entero, entonces

$$t^n \doteqdot \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}},$$

donde

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n\, dt = L[t^a;\ 1].$$

Cuando n es un número natural, tenemos $\Gamma(n+1) = n!$

EJEMPLO 7. Hallar la transformada de la función $t \cos \alpha$ Tenemos

$$\frac{p}{p^2+\alpha^2} \doteqdot \cos \alpha t, \quad -\left(\frac{p}{p^2+\alpha^2}\right)' \doteqdot t \cos \alpha t$$

o bien

$$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2} \doteqdot t \cos \alpha t. \qquad (1$$

TEOREMA 5 (SOBRE LA DERIVACIÓN DEL ORIGINAL). *Es válida fórmula*

$$L[f'(t);\ p] = pL[f(t);\ p] - f(0) \quad (\text{Re } p > s_0) \qquad (1$$

suponiendo que la función $f(t)$ es continua [1]), *tiene la derivada $f'(t)$ continua a trozos sobre $[0, \infty)$ con discontinuidades de primer género y los índices de crecimiento de $f(t)$ y $f'(t)$ son iguales a s_0.*

DEMOSTRACION. Tenemos

$$L[f'(t); p] = \int_0^\infty \exp(-pt) f'(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \exp(-pt) f'(t)\,dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[e^{-pt} f(t) \Big|_0^N + p \int_0^N e^{-pt} f(t)\,dt \right] =$$

$$= -f(0) + pL[f(t); p] \quad (\operatorname{Re} p > s_0),$$

porque

$$|e^{-pN} f(N)| \leqslant e^{-aN} M e^{s_0 N} = M e^{-(a-s_0)N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

COROLARIO 1. *Es válida la fórmula*

$$L[f^{(n)}(t); p] = p^n L[f(t); p] - p^{n-1} f(0) - \ldots$$

$$\ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (\operatorname{Re} p > s_0) \qquad (12)$$

a condición de que $f(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ sean continuas, $f^{(n)}$ sea continua a trozos sobre $[0, \infty)$ y el crecimiento de la función f junto con sus derivadas hasta el orden de n, inclusivamente, sea igual a s_0.

En particular, cuando

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0 \qquad (13)$$

tiene lugar

$$L[f^{(n)}(t); p] = p^n L[f(t); p]. \qquad (14)$$

EJEMPLO 8. Hallar la transformada de la función $f(t) = \cos^2 t$.

Sea $F(p) \doteq \cos^2 t = f(t)$. Entonces

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Pero

$$f(0) = \cos^2 0 = 1, \quad f'(t) = -2 \operatorname{sen} t \cos t = -\operatorname{sen} 2t \doteq -\frac{2}{p^2+4}.$$

---

[1]) Hay casos cuando la función $f(t)$ de la cual se trata en el teorema está dada sobre el intervalo $(0, \infty)$ y existe el límite por la derecha de $f(0+0) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} f(t)$. Entonces en la fórmula (11) es necesario sustituir $f(0)$ por $f(0+0)$.

Por consiguiente,

$$pF(p) - 1 = -\frac{2}{p^2+4},$$

de donde

$$F(p) = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{2}{p^2+4}\right] = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

Este mismo resultado se obtiene si se hace uso de la igualdad

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2},$$

$$L[\cos^2 t;\ p] = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\,\frac{p}{p^2+4} = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

TEOREMA 6 (INTEGRACIÓN DEL ORIGINAL).

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

En efecto, haciendo variar el orden de integración, tenemos

$$\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\,dt = \int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{-pt}f(\tau)\,d\tau\,dt = \int_0^\infty f(\tau)\,\frac{-e^{pt}}{p}\Big|_\tau^\infty d\tau =$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{p}\,L[f(\tau);\ p] = \frac{F(p)}{p}.$$

TEOREMA 7 (INTEGRACIÓN DE LA TRANSFORMADA).

Si la integral $\int_p^\infty F(q)\,dq$ *converge, entonces ésta es la transformada de la función* $f(t)/t$:

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q)\,dq.$$

DEMOSTRACIÓN. Haciendo variar el orden de intogración, obtenemos

$$\int_p^\infty F(q)\,dq = \int_p^\infty\left(\int_0^\infty e^{-qt}f(t)\,dt\right)dq = \int_0^\infty\left(\int_p^\infty e^{-qt}\,dq\right)f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty\left(-\frac{e^{-qt}}{t}\Big|_{q=p}^\infty\right)f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,e^{-pt}\,dt = L\left[\frac{f(t)}{t};\ p\right]$$

Observación 1. Aquí y a continuación aplicaremos la variación del orden de integración. Conforme al teorema de Fubini que aquí queda sin demostrar esta operación es legítima si la integral múltiple obtenida después de la variación converge absolutamente. Además, supongamos que la ruta de integración se encuentra enteramente en el semiplano $\operatorname{Re} p > s_0$.

COROLARIO 2.

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(q)\,dq,$$

si convergen las integrales impropias correspondientes.

EJEMPLO 9. Hallar la transformada $\int_0^t \operatorname{sen} 2\tau\,d\tau$.

Tenemos

$$\operatorname{sen} 2\tau \doteq \frac{2}{p^2+4}.$$

Según el teorema 6

$$\int_0^t \operatorname{sen} 2\tau\,d\tau \doteq \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

EJEMPLO 10. Hallar la transformada de la función $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$.

Sabemos que $\operatorname{sen} t \doteq \frac{1}{p^2+1}$. Por eso según el teorema 7

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arc\,tg}\, q\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

EJEMPLO 11. Hallar la integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

Utilizando el ejemplo 10 y el corolario 2, obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} q\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

TEOREMA 8 (TARDANZA DEL ORIGINAL).
Sea $f(t) = 0$ *para* $t < 0$, *entonces*

$$L[f(t-t_0);\ p] = e^{-pt_0} L[f(t);\ p],$$

donde t_0 *es cierto punto.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$L[f(t-t_0);\ p] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0)\,dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t-t_0)\,dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0)\,dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0)\,dt = \{t-t_0 = u,\ dt = du\} =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-p(u+t_0)} f(u)\,du = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u)\,du = e^{-pt_0} L[f(u);\ p]$$

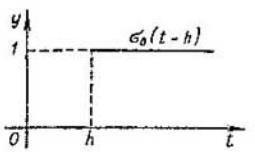

Fig. 155.

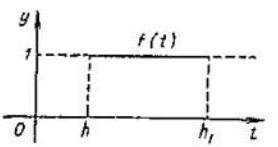

Fig. 156.

EJEMPLO 12. Como $L[\sigma_0(t);\ p] = \frac{1}{p}$, entonces (fig. 155)

$$L[\sigma_0(t-h);\ p] = e^{-ph}\frac{1}{p}.$$

EJEMPLO 13. Sea (fig. 156)

$$f(t) = \sigma_0(t-h) - \sigma_0(t-h_1) \quad (h < h_1).$$

Según el teorema 2 y el teorema 8 tenemos

$$L[f(t);\ p] = L[\sigma_0(t-h);\ p] - L[\sigma_0(t-h_1);\ p] = \frac{e^{-ph} - e^{-ph_1}}{p}.$$

EJEMPLO 14. Hallar la transformada de la función $f(t)$ (fig. 157 definida sobre el segmento $[0,\ 2a]$ por las igualdades

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leqslant t \leqslant a, \\ 0, & a < t < 2a \end{cases}$$

y prolongada luego para todo el rayo $t > 0$ con el período $2a$.

Tenemos

$$L[f(t);\ p] = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{ka}^{(k+1)a} e^{-pt} f(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2ka}^{(2k+1)a} e^{-pt} A\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{p}\left[e^{-p2ka} - e^{-p(2k+1)a}\right] =$$

$$= \frac{A(1-e^{-pa})}{p} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kpa} = \frac{A(1-e^{-pa})}{p(1-e^{-2pa})} = \frac{A}{p(1+e^{-pa})}.$$

La expresión

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau$$

se llama *convolución de las funciones* $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y se designa por el símbolo $f_1 * f_2$.

Es fácil comprobar que

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\,d\tau$$

(es necesario sustituir la variable $t - \tau = u$).

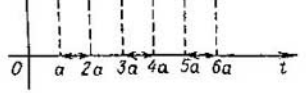

Fig. 157.

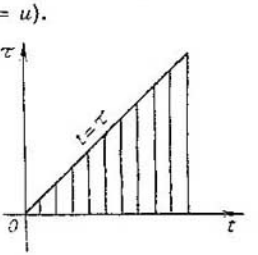

Fig. 158.

TEOREMA 9. *La transformación de Laplace de la convolución es igual al producto de las transformaciones de Laplace de las funciones* $f_1(t)$ *y* $f_2(t)$ $(s_0(f_1) = s_0(f_2))$:

$$L\left[\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau;\ p\right] = L[f_1(t);\ p]\cdot L[f_2(t);\ p].$$

DEMOSTRACION. Recordemos nuestra suposición de que $f_1(t) = f_2(t) = 0$ para $t < 0$. Haciendo variar el orden de integración

(fig. 158) y teniendo en cuenta que $f_2(t-\tau)=0$ para $0<t<\tau$, tenemos

$$L[f_1 * f_2;\ p] =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f_1(\tau; f_2(t-\tau)\,d\tau\,dt = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-pt} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) \left(\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\,dt \right) d\tau = \{t-\tau=z,\ dt=dz\} =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) \left(\int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z)\,dz \right) d\tau = \int_0^\infty f_1(\tau)\, e^{-p\tau}\,d\tau \int_0^\infty f_2(z)\, e^{-pz}\,dz =$$

$$= L[f_1(\tau);\ p] \cdot L[f_2(z);\ p].$$

Notemos que la integral doble de la función $e^{-pt} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)$ sobre el sector infinito $\{0<\tau\leqslant t,\ 0<t<\infty\}$ converge absolutamente cuando $\operatorname{Re} p > s_0$.

EJEMPLO 15.

$$L\left[\int_0^t e^{t-\tau} \operatorname{ch} \alpha\tau\,d\tau;\ p\right] = L[e^t;\ p]\, L[\operatorname{ch} \alpha t;\ p] = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{p}{p^2-\alpha^2}.$$

COROLARIO 3. *Sean* $F(p) \doteq f(t)$ y $G(p) \doteq g(t)$, *entonces tiene lugar la fórmula de Duhamel* [1])

$$pF(p)\, G(p) \doteq f(t)\, g(0) + \int_0^t f(\tau)\, g'(t-\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$F(p)\, G(p) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\,d\tau.$$

De aquí, según el teorema 5 sobre la derivación del original obtenemos

$$pF(p)\, G(p) \doteq \left(\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\,d\tau \right)_t = f(t)\, g(0) + \int_0^t f(\tau)\, g'(t-\tau)\,d\tau.$$

[1]) En cuanto a la función $g(t)$ se puede hacer la misma nota que en la llamada puesta al pie de la pág. 423. Duhamel (1797—1872), matemático francés.

TEOREMA 10. *Si* $\mathcal{F}\ (f\ (x);\ y)$ *y* $L\ [f\ (x);\ p]$ *son las transformaciones de Fourier y de Laplace, respectivamente, de la función* $f\ (s_0\ (f) < 0)$, *entonces*

$$2\pi\mathcal{F}\ (f\ (x);\ y) = L\ [f\ (x);\ iy] + L\ [f\ (-x);\ -iy]. \tag{16}$$

En efecto,

$$2\pi\mathcal{F}\ (f\ (x);\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f\ (x)\ dx = \int_{0}^{\infty} e^{-ixy} f\ (x)\ dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-ixy} f\ (x)\ dx =$$

$$= L\ [f\ (x);\ iy] + \int_{0}^{\infty} e^{ixy} f\ (-x)\ dx =$$

$$= L\ [f\ (x);\ iy] + L\ [f\ (-x);\ -iy].$$

Por la fórmula (16) es fácil encontrar la transformada de Fourier si se conoce la transformación de Laplace de la función f.

EJEMPLO 16. Sea

$$f\ (x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} \cos \beta x, & x \geqslant 0,\ \alpha > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Hallar la transformación de Fourier de esta función.

La transformación de Laplace de la función f existe $(s_0\ (f) = -\alpha)$, por eso

$$2\pi\mathcal{F}\ (f\ (x);\ y) = L\ [f\ (x);\ iy] = L\ [e^{-\alpha x} \cos \beta x;\ iy] = \frac{iy + \alpha}{(iy + \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Vamos a exponer sin demostración varios teoremas sobre la determinación del original a partir de la transformada conocida.

TEOREMA 11. *Sea* $F\ (p)$ *una función analítica sobre un plano complejo extendido y sean* $p = \infty$ *regular y* $F\ (\infty) = 0$, *es decir, su serie de Laurent tiene la forma*

$$F\ (p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

Entonces el original de esta transformada está dada por la fórmula

$$f\ (t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \dfrac{t^n}{n!}, & t > 0. \end{cases} \tag{17}$$

En efecto,

$$\int_{0}^{\infty} f\ (t)\ e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} \int_{0}^{\infty} e^{-pt} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{p^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

En virtud del teorema (de unicidad) 1 del § 7.1 el teorema queda demostrado.

TEOREMA 12. *Sea $F(p)$ una función racional fraccional con los polos $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Entonces*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{p=p_k} [F(p)\, e^{pt}]. \tag{18}$$

Si p_k son polos simples y $F(p) = A(p)/B(p)$, donde $A(p)$ y $B(p)$ son polinomios sin raíces comunes, entonces

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\, e^{p_k t}. \tag{19}$$

TEOREMA 13 (FORMULA DE MELLIN[1]). *Si $F(p)$ es una función analítica en $\operatorname{Re} p > s_0$, $F(p) \to 0$ uniformemente respecto a $\arg p$, para $|p| \to \infty$, $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\, dy < M$, entonces $F(p)$ es la transformada de la función*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp \quad (x > s_0). \tag{20}$$

EJEMPLO 17. Hallar el original de la función

$$F(p) = 1/(p-1)(p^2+1).$$

Valgámonos del teorema 12. Aquí $A(p) \equiv 1$, $B(p) = (p-1) \times (p^2+1)$. Los puntos $p = 1$ y $p = \pm i$ son polos simples de la función $F(p)$. Por la fórmula (19) tenemos ($B'(p) = 3p^2 - 2p + 1$)

$$f(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{e^{it}}{2(1+i)} + \frac{e^{-it}}{2(i-1)} = \frac{1}{2}[e^t - \cos t - \operatorname{sen} t].$$

EJEMPLO 18. Hallar el original $f(t)$ si $F(p) = \operatorname{sen}(1/p)$.

Tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3!p^3} + \frac{1}{5!p^5} - \cdots,$$

o sea, $F(p)$ satisface la condición del teorema 1. Por eso

$$f(t) = 1 - \frac{1}{3!}\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{5!}\frac{t^4}{4!} - \cdots.$$

Para mayor comodidad representaremos todas las transformadas obtenidas en una tabla.

[1]) R. H. Mellin (1854—1933), matemático finlandés.

Nº de orden	Original	Transformada
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$\operatorname{sen} \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
3	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
4	$\cos \alpha (t-t_0)$	$\frac{pe^{-pt_0}}{p^2+\alpha^2}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
6	$\operatorname{sh} \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
7	$\operatorname{ch} \alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
8	$e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
9	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
10	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
11	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$
12	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
13	$t \operatorname{sen} \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$
14	$t \cos \alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
15	$f^{(n)}(t),\ f(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$	$p^n F(p)$
16	$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$

Continuación

Nº de orden	Original	Transformada
17	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(q)\,dq$
18	$f(t-t_0)$	$e^{-pt_0}F(p)$
19	$\sigma_0(t-h)$	$e^{-ph}\frac{1}{p}$
20	$f_1^* f_2$	$L[f_1;\ p]\cdot L[f_2;\ p]$
21	$f(t)g(0)+\int_0^t f(\tau)\,g'(t-\tau)\,d\tau$	$pL[f;\ p]\cdot L[g;\ p]$
22	$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\frac{t^k}{k!}\ (t>0)$	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}$

§ 7.3. Aplicaciones del cálculo operacional

Supongamos que está dada la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t). \qquad (1)$$

Es preciso hallar la solución de la ecuación (1) cuando $t \geqslant 0$ para las condiciones siguientes

$$x(0) = x_0,\quad x'(0) = x_0',\ \ldots,\quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Supongamos que $x(t)$ es la solución de (1) que satisface las condiciones iniciales (2). Entonces, al sustituir esta función en (1), obtenemos la identidad. Por lo tanto, la función que figura en el primer miembro de (1) y la función $f(t)$ tienen una misma L-transformada

$$L\Big[\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k x}{dt^k};\ p\Big] = L[f(t);\ p].$$

En virtud del corolario 1 del § 7.2

$$L\left[\frac{d^k x}{dt^k};\ p\right] = p^k L[x;\ p] - p^{k-1}x(0) - \ldots - px^{(k-2)}(0) - x^{(k-1)}. \quad (0)$$

Por eso, utilizando la propiedad de linealidad de la transformada, obtenemos

$$a_n L\left[\frac{d^n x}{dt^n};\ p\right] + \cdots + a_0 L[x;\ p] = L[f;\ p];$$

$$a_n[p^n L[x;\ p] - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_0' - \ldots - px_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}] +$$
$$+ a_{n-1}[p^{n-1}L[x;\ p] - p^{n-2}x_0 - \ldots - px_0^{n-3} - x_0^{(n-2)}] +$$
$$+ \ldots + a_1[L[x;\ p] - x_0] + a_0 L[x;\ p] = L[f;\ p].$$

Para abreviar la notación designemos $L[x;\ p] = \bar{x}(p)$, $L[f;\ p] = F(p)$. Entonces

$$\bar{x}(p)\cdot[a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0] =$$
$$= a_n[p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x^{(n-1)}] +$$
$$+ a_{n-1}[p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x^{n-2}] + \ldots$$
$$\ldots + a_2[px_0 + x_0'] + a_1 x_0 + F(p). \quad (3)$$

Llamaremos a la ecuación (3) *ecuación auxiliar, ecuación de la transformada* o *ecuación operatoria*.

Notemos que el coeficiente de $\bar{x}(p)$ en (3) se obtiene del primer miembro de (1) mediante la sustitución formal de las derivadas $\frac{d^k x}{dt^k}$ por las potencias de p^k. Designemos este coeficiente por

$$R_n(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0.$$

Es fácil ver que este coeficiente es el primer miembro de la ecuación característica para la ecuación diferencial (1) (véase el § 1.16 (2)). Entonces encontramos la transformada de la solución en la forma

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)} + \frac{\psi_{n-1}(p)}{R_n(p)}, \quad (4)$$

donde

$$\psi_{(n-1)}(p) = a_1 x_0 + a_2(px_0 + x_0') +$$
$$+ a_3(p^2 x_0 + px_0' + x_0'') + \ldots + a_n[p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots$$
$$\ldots + px_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)}]t$$

Si las condiciones iniciales son nulas, o sea, $x_0 = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0$, la fórmula (4) se escribirá

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)}. \quad (4')$$

Si ahora a partir de la transformada (4) ó (4') hallamos el original, entonces, en virtud del teorema de unicidad, éste será precisamente la solución buscada de $x(t)$.

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

$$\ddot{x} + 4x = 2, \quad x_0 = x'_0 = 0.$$

Según la fórmula (4') tenemos

$$\bar{x}(p) = \frac{2}{p(p^2+4)},$$

ya que $2 \doteq 2/p$. Desarrollemos la transformada en fracciones simples

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right].$$

De aquí

$$x(t) = \frac{1}{2}\sigma_0(t) - \frac{1}{2}\cos 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Hemos obtenido la solución $(1 - \cos 2t)/2$ sólo para $t \geqslant 0$. Es fácil comprobar que satisface nuestra ecuación también para $t < 0$. Además, este hecho se deduce de las consideraciones generales en las cuales no nos detendremos. Esta observación se refiere asimismo a los ejemplos 2, 3, 4.

Se puede utilizar también el teorema 12 del § 7.2 ($A \equiv 2$, $B = p(p^2+4)$, $B' = 3p^2 + 4$; $0, \pm 2i$ son ceros simples del polinomio $B(p)$):

$$x(t) = 2\left[\frac{e^{0t}}{B'(0)} + \frac{e^{2it}}{B'(2i)} + \frac{e^{-2it}}{B'(-2i)}\right] =$$

$$= 2\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{-8}e^{2it} + \frac{1}{-8}e^{-2it}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t.$$

EJEMPLO 2. $y'' + 2y' + 5y = \operatorname{sen} x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Planteemos la ecuación auxiliar:

$$[p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0)] + 2[p\bar{y}(p) - y(0)] + 5\bar{y}(p) = \frac{1}{p^2+1},$$

$$\bar{y}(p)(p^2 + 2p + 5) = \frac{1}{p^2+1} + 1.$$

De aquí

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)} + \frac{1}{p^2+2p+5} = \frac{p^2+2}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}.$$

El polinomio $B(p) = (p^2+1)(p^2+2p+5)$ tiene los ceros simples $p = \pm i$, $p = -1 \pm 2i$. En virtud del teorema 12 del § 7.2.

$(A = p^2 + 2,\ B'(p) = 2p(p^2 + 2p + 5) + 2(p+1)(p^2+1))$

tenemos

$$A(\pm i) = 1, \quad B'(i) = 4i(2+i), \quad B'(-i) = -4i(2-i),$$
$$A(-1+2i) = -1-4i; \quad B'(-1+2i) = -8i(2i+1),$$
$$A(-1-2i) = 4i-1, \quad B'(-1-2i) = -8i(2i-1),$$

$$y(x) = \frac{e^{ix}}{4i(2+i)} + \frac{e^{-ix}}{-4i(2-i)} + \frac{-(1+4i)e^{(-1+2i)x}}{-8i(2i+1)} +$$
$$+ \frac{(4i-1)e^{-(1+2i)x}}{-8i(2i-1)} = \frac{\operatorname{sen} x}{5} - \frac{\cos x}{10} + e^{-x}\left[\frac{\cos 2x}{10} + \frac{9}{20}\operatorname{sen} 2x\right].$$

Se puede utilizar asimismo el procedimiento de desarrollar la transformada en fracciones simples

$$\frac{p^2+2}{(p^2+1)(p^2+2p+5)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+5}.$$

Encontramos los números A, B, C y D con ayuda del método de coeficientes indeterminados: $A = -1/10$, $B = 1/5$, $C = 1/10$ y $D = 1$.

Así, pues,

$$\bar{y}(p) = \frac{-\frac{p}{10}+\frac{1}{5}}{p^2+1} + \frac{\frac{p}{10}+1}{p^2+2p+5} = -\frac{1}{10}\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+1} +$$
$$+ \frac{1}{10}\frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{9}{20}\frac{2}{(p+1)^2+4}.$$

En virtud de la tabla de las transformadas tenemos

$$y(x) = -\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} x + \frac{1}{10}e^{-x}\cos 2x + \frac{9}{20}e^{-x}\operatorname{sen} 2x.$$

Al resolver una ecuación diferencial es cómodo, a veces, utilizar la fórmula de Duhamel (véase el § 7.2, (15)).

Examinemos la ecuación (1) para las condiciones iniciales nulas: $x(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$. Siempre se puede reducir el problema a este caso sustituyendo la función buscada con ayuda de la fórmula

$$x(t) = y(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0).$$

Admitamos que se conoce la solución de la ecuación (1) cuando el segundo miembro es igual a la unidad y las condiciones iniciales son nulas. Para el problema dado la ecuación operatoria tiene la forma

$$R_n(p)\,\bar{x}_1(p) = \frac{1}{p}, \qquad (5)$$

donde $\bar{x}_1(p)$ es la transformada de la solución $x_1(t)$ del problema indicado. De las igualdades (4') y (5) encontramos

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)} = p\bar{x}_1(p)\,F(p). \tag{6}$$

Conforme a la fórmula de Duhamel

$$pF(p)\,\bar{x}_1(p) \doteq f(t)\,x_1(0) + \int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau$$

o teniendo en cuenta que $x_1(0) = 0$, obtenemos

$$\bar{x}(p) = pF(p)\,\bar{x}_1(p) \doteq \int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau.$$

De aquí que la solución de la ecuación (1) para las condiciones iniciales nulas tendrá la forma

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

donde $x_1(t)$ es la solución de la ecuación (1) cuando $f(t) \equiv 1$ y las condiciones iniciales son nulas.

EJEMPLO 3. Resolver la ecuación

$$x'' - x = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Primero resolvamos el problema de Cauchy para la ecuación

$$x_1'' - x_1 = 1, \quad x_1(0) = x_0'(0) = 0.$$

Planteemos la ecuación operatoria:

$$p^2\bar{x}_1(p) - \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p}, \quad \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p(p^2-1)} = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p}.$$

De aquí

$$x_1(t) = \operatorname{ch} t - 1.$$

Observación. Puesto que el segundo miembro de la ecuación $x_1'' - x_0' = 1$ tiene una forma especial, esta ecuación puede resolverse también de un modo habitual (véase el § 1.18).

Según la fórmula (7)

$$x(t)=\int_0^t \frac{1}{1+e^{\tau}}\operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t \frac{e^{t-\tau}-e^{-t+\tau}}{2(1+e^{\tau})}\,d\tau=$$

$$=\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\tau}d\tau}{1+e^{\tau}}-\frac{e^{-t}}{2}\int_0^t \frac{d(e^{\tau}+1)}{1+e^{\tau}}=$$

$$=-\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2}-\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\tau}de^{-\tau}}{e^{-\tau}+1}=$$

$$=-\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2}-\frac{e^t}{2}(e^t-1)+\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{d(e^{-\tau}+1)}{e^{-\tau}+1}=$$

$$=-\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{e^t}{2}+\frac{e^t}{2}\ln\frac{e^{-t}+1}{2}=$$

$$=\operatorname{sh} t\ln\frac{e^t+1}{2}+\frac{1}{2}[-te^t+e^t-1].$$

RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES. Examinemos esta cuestión citando un ejemplo concreto.

EJMPLO 4. Supongamos que es preciso hallar la solución del sistema lineal

$$\left.\begin{aligned}2\dot{x}+\dot{y}+x&=1,\\ \dot{x}+3\dot{y}+2y&=0\end{aligned}\right\}$$

para las condiciones iniciales $y(0)=x(0)=0$.

Designemos por $\bar{x}(p)$, $\bar{y}(p)$ las transformadas de las funciones buscadas. Planteemos las ecuaciones auxiliares:

$$\left.\begin{aligned}2p\bar{x}(p)+p\bar{y}(p)+\bar{x}(p)&=\frac{1}{p},\\ p\bar{x}(p)+3p\bar{y}(p)+2\bar{y}(p)&=0.\end{aligned}\right\}$$

Ahora bien, para las transformadas hemos obtenido un sistema lineal de ecuaciones algebraicas. El determinante del sistema

$$\Delta=\begin{vmatrix}2p+1 & p\\ p & 3p+2\end{vmatrix}=5p^2+7p+2.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas, encontramos

$$\bar{x}(p)=\frac{3p+2}{p(5p^2+7p+2)},\quad \bar{y}(p)=\frac{-1}{5p^2+7p+2}.$$

Escribamos la transformada $\bar{y}(p)$ en la forma

$$\bar{y}(p) = -\frac{1}{5}\frac{1}{(p+0,7)^2-0,09} = -\frac{2}{3}\frac{0,3}{(p+0,7)^2-(0,3)^2},$$

de donde

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{-0,7t}\operatorname{sh}(0,3)\,t.$$

Luego

$$\bar{x}(p) = \frac{3}{5[(p+0,7)^2-(0,3)^2]} + \frac{1}{p} - \frac{5p+7}{5p^2+7p+2} =$$

$$= 2\frac{0,3}{(p+0,7)^2-(0,3)^2} + \frac{1}{p} - \frac{p+0,7}{(p+0,7)^2-(0,3)^2} - \frac{0,7}{(p+0,7)^2-(0,3)^2},$$

o sea,

$$x(t) = 2e^{-0,7t}\operatorname{sh}(0,3t) + 1 - e^{-0,7t}\operatorname{ch}(0,3t) -$$

$$- \frac{7}{3}e^{-0,7t}\operatorname{sh}(0,3t) = 1 - \frac{1}{3}e^{0,7t}\operatorname{sh}(0,3t) - e^{-0,7t}\operatorname{ch}(0,3t).$$

CÁLCULO DE LAS INTEGRALES.

EJEMPLO 5. Calcular la integral $I(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}\,dt$.

Hallemos la transformada de esta integral:

$$L[I(x); p] = \int_0^\infty e^{-px}\int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}\,dt\,dx =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px}(1-\cos xt)\,dx\frac{dt}{t^2} = \int_0^\infty L[1-\cos xt; p]\frac{dt}{t^2} =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+t^2}\right]\frac{dt}{t^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{p(p^2+t^2)} = \frac{1}{p^2}\operatorname{arctg}\frac{t}{p}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2p^2}.$$

Por lo tanto,

$$I(x) = \frac{\pi}{2}x.$$

Indice alfabético de materias

Amplitud de oscilación, 248
Aplicación conforme, 360
Area de una superficie, 166
Armónico, 250

Bernoulli, ecuación, 30
Bessel, funciones, 100, 337

Cálculo de integrales con ayuda de los residuos, 405
— operacional, 416
Cambio de variables en una integral, 155, 156
Campo de direcciones, 20
— de un potencial, 200
— de vectores, 87
Centro, 122
— de masas, 173
— de gravedad, 174
Cinta de Möbius, 222
Circulación del vector, 243
Clasificación de los puntos de reposo, 117
— de puntos singulares aislados, 395
— — — — en el infinito, 400
Coeficientes de Fourier, 256, 266, 271
— de la serie trigonométrica, 250
Completitud de funciones trigonométricas, 274
Condición inicial, 13, 52, 316
Condiciones de Cauchy—Riemann, 364
Conjunto conexo, 357
— con la medida cero, 136
Contorno cerrado, 193
Convergencia de una integral impropia, 178, 179
— de una serie de potencias, 387
— en media cuadrática, 268
— según la norma, 268
Convolución de las funciones, 426
Coordenadas cilíndricas, 165
— del centro de masas, 173
— esféricas, 162
— polares, 160
Coseno transformación de Fourier, 288
Criterios de convergencia de las series de Fourier, 259
Cuerda, 329
Curva autodisjunta, 193
— cerrada, 193
— continua, 192
— envuelta, 50
— integral, 11, 52
— orientada, 205
— suave a trozos, 192

Derivación del original, 421
— de una transformada, 420
Derivada de la función, 357
— de una matriz, 88

Desigualdad de Bessel, 273
— de Buniakovski, 267
— de Minkowski, 268
— trianguiar, 34
Determinante de Jacobi, 157
— de Wronski, 65, 90
Distancia, 34
Distribución estacionaria del calor, 317
Divergencia del vector, 234
Dominio de definición de la función, 354

Ecuación auxiliar, 432
— característica, 70, 94
— con coeficientes constantes, 70
— de Bernoulli, 30
— de conducción del calor, 305, 322, 327
— de Euler, 74
— de la transformada, 432
— diferencial, 10
— — con variables separables, 24
— — de orden superior, 56
— — de vibración de una cuerda, 331
— — en diferenciales totales, 209
— — lineal, 28
— — — de orden superior, 63
— — — de primer orden, 28
— — homogénea, 25
— — ordinaria, 10
— en variaciones, 346
— operatoria, 432
Ecuaciones equivalentes, 12
Ensilladura, 120
Envuelta de la familia de curvas, 49
Espacio completo, 35
— de fases, 84, 86, 87
— métrico, 34
Espectro de una función no periódica, 293
— — — — periódica, 293
Estimación de los coeficientes de Fourier, 266
Estructura de la solución general de una ecuación homogénea lineal, 68
Euler, ecuación, 74
—, método de resolución aproximada de la ecuación diferencial, 43
—, quebrada, 45

Fase de oscilación, 348
Figura exterior del conjunto, 133
— interior del conjunto, 133
Flujo de un vector, 230
Foco, 123
Fórmula de Cauchy, 382
— de D' Alembert, 335
— de Duhamel, 428
— de Green, 207, 213
— de Mellin, 429
— de Stokes, 207, 243
Fourier, coeficiente, 256
—, integral, 280

Fourier, — reiterada, 288
—, — simple, 284
—, serie, 246
—, transformación, 287, 288
—, — directa, 287
—, — inversa, 287
Frecuencia de oscilación, 248
Función analítica, 357
— armónica, 317, 367
— de Bessel, 109
— gamma, 192
— inversa, 370
—, logaritmo natural, 373
— multiforme de una variable compleja, 355
— normal, 270
— potencial, 202, 361
— propia, 324
— unidad, 418
— unívoca de una variable compleja, 354
— vectorial, 89
Funciones linealmente dependientes, 64
— — independientes, 64

Gradiente de la función, 201

Igualdad de Parseval—Steklov, 273, 276
Imagen del conjunto, 354
Indice de crecimiento de la función, 417
Integración de acuaciones mediante series, 106
— de funciones de una variable compleja, 376
— de la transformada, 423
— del original, 423
Integral como función del parámetro, 143
— curvilínea de primer género, 194
— — de segundo género, 198
— de Dirichlet, 343
Integral de Fourier, 280
— del tipo de Cauchy, 385
— del vector a lo largo de la curva, 197
— de Poisson, 181
— de Riemann, 128
— de superficie de segundo género, 231
— de una matriz, 89
— doble, 128
— general de la ecuación diferencial, 15
— impropia, 178
— — absolutamente convergente, 178
— — convergente, 178, 179
— — — uniformemente, 184, 189
— — dependiente de un parámetro, 183
— múltiple, 128
— reiterada, 286
—, resto, 186
— simple de Fourier, 284
— sobre una región plana orientada, 227
— sobre una superficie de primer género, 219
— triple, 128
Isoclina, 21

Jacobi, determinante, 157
Jacobiano, 157, 227

Lado de una superficie, 221
Lebesgue, medida, 134
Linealidad de la transformada, 419

Matriz de Cauchy, 92
— fundamental, 91
— inversa, 88
— simétrica, 99
— unidad, 89, 93
Medida de Jordan, 129, 134
— exterior del conjunto, 134
— interior del conjunto, 134
Método de Euler de resolución aproximada de la ecuación, 43
— de Fourier de separación de variables, 323
— de Lagrange, 103
— de Newton, 39
— de tangentes, 39
— de variación de una constante arbitraria, 30
Momento de inercia, 177

Norma de la función, 268
Nudo estable, 119, 123
—inestable, 120, 123

Operador aditivo, 63
— autoconjugado, 99
— continuo, 34
— contractivo, 34
— de Hamilton, 206
— de Laplace, 247, 367, 370
— homogéneo, 63
— lineal, 63
— — diferencial de n-ésimo orden, 63
Orientación de una curva, 192
— de una región, 212
— de una superficie, 221, 225
Original, 418
Ortogonalidad de funciones, 263, 270
Oscilación armónica, 248

Parte principal de la serie de Laurent, 391
— regular de la serie de Laurent, 391
Paso de cálculo, 44
Polo de la función, 396, 402
Posición de equilibrio del sistema, 115
Potencial, 202
Principio de aplicaciones contraídas, 36
Problema de Cauchy, 13, 52
— de Dirichlet, 317, 318, 320
— de Sturm—Liouville, 323,336, 340
— de variación, 345
— planteado correctamente, 113
Producto directo de los conjuntos, 183
— escalar de funciones, 267
Punto de reposo, 115
— fijo del operador, 34
— singular aislado, 395, 401
— — de la integral, 189

Rectángulo, 130
Reducción del orden de una ecuación, 59
Región del tipo H, 214, 235, 237
— elemental, 214
— simplemente conexa, 207, 356
Residuo de la función, 398, 402
Rotor del vector, 206

Sacacorchos dextrorso, 223
— sinistrorso, 223
Seno transformación de Fourier, 288
Serie convergente, 254
— de Fourier, 256, 266, 271
— — — en el sistema ortogonal, 271
— — — en forma compleja, 278
— de Laurent, 389

Serie de potencias, 386
— de Taylor, 387
— que mayorca, 234
— trigonométrica, 250
Singularidad esencial, 397
— evitable, 398, 401
Sistema de coordenadas cilíndrico, 165
— — — derecho, 223
— — — esférico, 162
— — — izquierdo, 223
— — — polar, 160
Sistema de ecuaciones autónomo, 86
— — — dinámico, 86
— — — elíptico, 125
— — — hiperbólico, 125
— — — homogéneo, 87
— — — normal, 55, 57, 86
— — — parabólico, 125
— de funciones linealmente dependientes, 64
— — — — — independientes, 64, 90, 271
— fundamental de soluciones, 64, 69, 91
— normal autónomo, 86
— ortogonal completo de funciones, 273
— — de funciones, 270, 339
— ortonormalizado de funciones, 271
Solución asintóticamente estable, 114
— de D' Alembert, 334
— de una ecuación diferencial, 11
— estable, 113
— general de una ecuación lineal homogénea, 68
— — — — — — no homogénea, 77
— particular, 12
— — de una ecuación no homogénea, 77
— singular, 48
Sucesión convergente, 34
— de funciones, 34
— — —, convergente en media cuadrática, 268
— — —, convergente según la norma, 268
— — —, convergente uniformemente, 35
— fundamental, 34
— iterativa, 36
Suma integral de Riemann, 131
Superficie poliedral, 246
— suave, 218
— — a trozos, 235

Tabla de transformadas, 430
Tardanza del original, 424
Temperatura de un cuerpo, 305
Teorema de Cauchy, 379
— de existencia de la solución de una ecuación de primer orden, 31, 40
— — — para un sistema de ecuaciones, 55
— — — — — — — — de orden superior, 57
— de Gauss — Ostrogradski, 235
Teorema de Guldin, 174
— de Liapunov, 118
— de los residuos, 403
Término de la serie, 250
Transformación de Fourier, 287, 289
— de Heaviside, 417
— de Laplace, 417
— — — de la convolución, 426
Transformada de Laplace, 417
— — — de la función, 417
Trayectoria de fases, 88

Valor propio, 324
Variación, método, 30, 75, 103
Vector propio, 94
Velocidad de fases, 87
Vibración de una cuerda, 329
— de una membrana, 335

Wronski, determinante, 65, 90
Wronskiano, 65